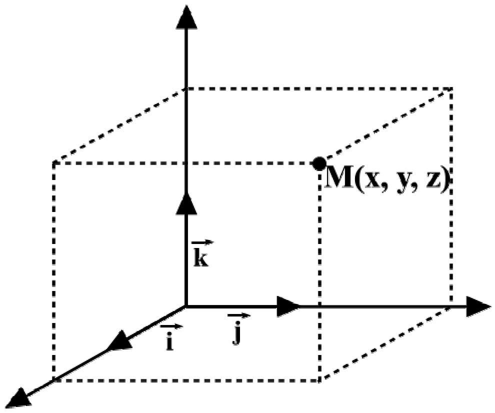
Vektori



$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\angle(\vec{a},\vec{b})$$

Zadaci:

1. Na□i ortogonalne projekcije to□aka $A(-2, 1, 5)$, $B(3, 1, 4)$, $C(1, -2, 3)$ na:
   a) xy - ravninu; b) yz - ravninu; c) xz - ravninu;
   d) x - os; e) y - os; f) z -os.

2. Zadane su to□ke $A(2, 1, 3)$, $B(-3, 0, 2)$, $C(2, -1, -5)$. Odrediti koordinate simetri□nih to□aka u odnosu na:
   a) xy - ravninu; b) yz - ravninu; c) xz - ravninu;
   d) x - os; e) y - os; f) z -os;
   g) ishodi□te.

3. Dokazati da je trokut ABC pravokutan ako je $A(3, -1, 6)$, $B(-1, 7, -2)$, $C(1, -3, 2)$.

4. Je li trokut ABC sa vrhovima $A(3, -1, 2)$, $B(0, -4, 2)$, $C(-3, 2, 1)$ istostrani□an ili jednakostrani□an?

5. Na osi Oy na□i to□ku jednako udaljenu od to□aka $A(2, 4, 0)$ i $B(-3, 3, 2)$.

6. Na□i jednakost koja izražava linearnu zavisnost vektora:
   a) $\vec{a} = (1,3,5)$, $\vec{b} = (0,4,5)$, $\vec{c} = (7,-8,4)$, $\vec{d} = (2,-1,3)$;
   b) $\vec{a} = (1,2,5)$, $\vec{b} = (-1,6,3)$, $\vec{c} = (0,0,2)$, $\vec{d} = (1,0,4)$.

7. Napisati vektor $\vec{d} = 11\vec{i} - 6\vec{j} + 5\vec{k}$ kao linearnu kombinaciju vektora $\vec{a} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = -\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$, $\vec{c} = 2\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}$.

8. Pokazati da su vektori $\vec{a} = 3\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = -\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{c} = -5\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$ linearno zavisni.

9. Zadani su vektori $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j}$, $\vec{b} = \vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{c} = 2\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$, $\vec{d} = 3\vec{i} + 7\vec{j} - 7\vec{k}$. Izraziti svaki od tih vektora kao linearnu kombinaciju ostalih.

10. Zadana su tri uzastopna vrha paralelograma A(3, –4, 7), B(–5, 3, –2), C(1, 2, –3). Odrediti četvrti vrh D.

11. Zadana su dva vrha paralelograma A(2, –3, 5) i B(–1, 3, 2) i sjecište S(4, –1, 7) njegovih dijagonala. Odrediti preostala dva vrha.

12. Pokazati da su točke A(3, –1, 2), B(1, 2, –1), C(–1, 1, –3) i D(3, –5, 3) vrhovi trapeza.

13. Ako su točke A(–2, 1, 3), B(1, –7, 4), C(0, 4, –2), D(1, 1, 1). Izračunati $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$.

14. Vrhovi trokuta su: A(–1, –2, 4), B(–4, –2, 0), C(3, –2, 1). Izračunati unutarnji kut pri vrhu B.

15. Zadane su točke A(–1, 3, –7), B(2, –1, 5), C(0, 1, –5). Izračunati:
    a) $\left(2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CB}\right)\left(2\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA}\right)$;
    b) $\left(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}\right)\overrightarrow{BC}$;
    c) $\left(\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC}\right)\overrightarrow{AB}$

16. Pokazati da je trokut s vrhovima A(3, 0, 7), B(4, 2, 2) i C(9, 2, 9) pravokutan. Koja točka je vrh pravog kuta?

17. Pokazati da je četverokut ABCD sa vrhovima A(–3, 5, 4), B(1, 0, –5), C(1, –1, 6), D(–3, 4, 15) romb.

18. Odrediti t tako da vektori $\vec{a} = t\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$ i $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} - t\vec{k}$ budu okomiti.

19. Odrediti vektor $\vec{b}$ kolinearan s vektorom $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$ takav da je $\vec{b} \cdot \vec{a} = 3$.

20. Vektor $\vec{c}$ je okomit na vektore $\vec{a} = (3, 2, 2)$ i $\vec{b} = (18, -22, -5)$, a sa osi Oy zatvara tupi kut. Nađi vektor $\vec{c}$ ako je $|\vec{c}| = 14$.

21. Zadani su vektori $\vec{a} = (2, -1, 3)$, $\vec{b} = (1, -3, 2)$, $\vec{c} = (3, 2, -4)$. Nađi vektor $\vec{x}$ ako je $\vec{a} \cdot \vec{x} = -5$, $\vec{b} \cdot \vec{x} = -11$, $\vec{c} \cdot \vec{x} = 20$.

22. Zadani su vektori $\vec{a} = 3\vec{i} - \vec{j} + 5\vec{k}$ i $\vec{b} = (1, 2, -3)$. Odrediti vektor $\vec{x}$ takav da je $\vec{x} \cdot \vec{a} = 9$, $\vec{x} \cdot \vec{b} = -4$.

23. Naći vektor $\vec{a}$ koji s vektorima $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ zatvara kutove $\alpha = \frac{\pi}{4}$, $\beta = \frac{\pi}{3}$, $\gamma = \frac{2\pi}{3}$ i za koji vrijedi $|\vec{a}| = 4$.

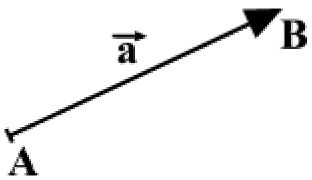
24. Naći projekciju vektora $\vec{a} = 2\vec{m} - 3\vec{n}$ na vektor $\vec{b} = \vec{m} + \vec{n}$ ako je $|\vec{m}| = 2$, $|\vec{n}| = 3$, $\angle(\vec{m}, \vec{n}) = \frac{\pi}{3}$.

25. Naći kut koji zatvaraju jedinični vektori $\vec{m}$ i $\vec{n}$ ako su vektori $\vec{a} = \vec{m} + 2\vec{n}$ i $\vec{b} = 5\vec{m} - 4\vec{n}$ međusobno okomiti.

26. Odrediti jedinični vektor $\vec{n}_0$ koji je komplanaran sa vektorima $\vec{a}$ i $\vec{b}$, ako je $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$, $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{3}$ i $\vec{n} \cdot \vec{a} = 7$ i $\vec{n} \cdot \vec{b} = 3$.

27. Odrediti skalarni produkt vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ i kut između njih ako je $\vec{a} = 4\vec{i} + 5\vec{j} - 3\vec{k}$ i $\vec{b} = -5\vec{i} + 13\vec{j} + 12\vec{k}$.

28. Naći vektor ako je okomit na vektore $\vec{a} = (2, -3, 1)$ i $\vec{b} = (1, -2, 3)$ i koji zadovoljava uvjet $\vec{c} \cdot \left(\vec{i} + 2\vec{j} - 7\vec{k}\right) = 10$.



$$\overrightarrow{AB} = \vec{a}$$
$$|\overrightarrow{AB}| = \overline{AB} = |\vec{a}| = a$$

29. Dati su vektori $\vec{a} = (3, -1, 4)$ i $\vec{b} = (5, 2, -6)$. Naći
a) skalarni produkt $\vec{a} \cdot \vec{b}$;
b) vektorski produkt $\vec{a} \times \vec{b}$;
c) površinu paralelograma konstruiranog nad vektorima $\vec{a}$ i $\vec{b}$.

30. Ako su zadani vektori $\vec{a} = (2, -5, 1)$ i $\vec{b} = (3, 0, -4)$ naći $\vec{a} \times \vec{b}$ i uvjeriti se da je $\vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{a}$ i $\vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{b}$.

31. Zadani su vektori $\vec{a} = (-3, 1, -4)$ i $\vec{b} = (0, 2, -5)$. Naći
a) $\vec{a} \times \vec{b}$; b) $|\vec{a} \times \vec{b}|$; c) $\varphi = \angle(\vec{a}, \vec{b})$;
d) $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{a}$; e) $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{b}$.

32. Zadani su vektori $\vec{a} = (2, 0, 4)$, $\vec{b} = (-5, 1, -3)$ i $\vec{c} = (-4, -1, 7)$.
Odrediti vektore:
a) $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$;
b) $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$.

33. Izračunati mješoviti produkt $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$ ako je:
a) $\vec{a} = (1, 0, -1)$, $\vec{b} = (1, 1, 0)$, $\vec{c} = (0, 0, -1)$;
b) $\vec{a} = (3, 4, 5)$, $\vec{b} = (1, -1, 2)$, $\vec{c} = (2, 0, 3)$.

34. Izračunati volumen paralelopipeda konstruiranog nad vektorima:
a) $\vec{a} = (1, 2, 3)$, $\vec{b} = (3, 4, -1)$, $\vec{c} = (0, -1, 0)$;
b) $\vec{a} = (3, -1, 4)$, $\vec{b} = (-4, 2, 3)$, $\vec{c} = (1, -1, -2)$.

35. Zadane su točke $A(1, 4, -2)$, $B(7, 3, -1)$, $C(-2, 6, 3)$ i $D(5, -1, -4)$. Odrediti volumen tetraedra $ABCD$.

36. Vrhovi tetraedra su $A(-2, 1, 4)$, $B(3, -2, 5)$, $C(-4, 2, 0)$ i $D(2, -3, 0)$. Odrediti:
a) volumen tetraedra $ABCD$;
b) visinu tetraedra iz vrha D.

37. Odrediti $x \in \mathbf{R}$ tako da su vektori $\vec{a} = (2, 3, 7)$, $\vec{b} = (-5, 1, 4)$ i $\vec{c} = (4, 2, x)$ linearno zavisni.

38. Razložiti vektor $\vec{c}$ na komponente duž vektora $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $(\vec{a} \times \vec{b})$ ako je $\vec{a} = (1, 1, -1)$, $\vec{b} = (-2, -1, 2)$, $\vec{c} = (1, -1, 2)$.

39. Naći površinu trokuta zadanog vrhovima $A(-3, -2, 0)$, $B(3, -3, 1)$ i $C(5, 0, 2)$.

40. Izračunati projekciju vektora $\vec{a} = (3, -12, -4)$ na vektor $\vec{b} = \vec{c} \times \vec{d}$, ako je $\vec{c} = (1, 0, -2)$ i $\vec{d} = (1, 3, -4)$.

41. Zadani su vektori $\vec{a} = (2, -4, 3)$, $\vec{b} = (3, -1, 5)$ i $\vec{c} = (1, -2, 4)$.
Izračunati:
a) vektor $\vec{x}$ iz uvjeta $\vec{x} \cdot \vec{a} = 1, \vec{x} \cdot \vec{b} = 2, \vec{x} \cdot \vec{c} = 3$;
b) jedinični vektor normalan na ravninu koju čine vektori $\vec{x}$ i $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$;
c) projekciju vektora $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$ na vektor $\vec{x}$;
d) površinu paralelograma razapetog nad vektorima $\vec{x}$ i $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$.

42. Vektori $\vec{a} = (1, 2m, 1)$, $\vec{b} = (2, m, m)$ i $\vec{c} = (3m, 2, -m)$ su ivice tetraedra, gdje je $m \in \mathbf{R}$ parametar. Odrediti:
a) volumen tog tetraedra;
b) nađi m tako da vektori $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ budu komplanarni. Za nađeno m razložiti vektor $\vec{c}$ po pravcima vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$;

43. Dati su vektori $\vec{a} = (2m, 1, 1-m)$, $\vec{b} = (-1, 3, 0)$ i $\vec{c} = (5, -1, 8)$
a) Odrediti m tako da vektor $\vec{a}$ zaklapa jednake kutove sa vektorima $\vec{b}$ i $\vec{c}$.
b) Za nađeno m iz a) nađi volumen paralelopipeda konstruiranog nad vektorima $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ i jednu visinu tog paralelopipeda.