Zadaci na pismenom ispitu iz Matematičke analize I (Grupa A, 19. 06. 2003.) s rješenjima

<u>Zadatak 1.1.</u> Skicirajte u Gaussovoj ravnini skup svih kompleksnih brojeva $z \in \mathbf{C}$ za koje je

$$R_e\left(\frac{1}{z}\right)=1, \quad I_m\left(\frac{1}{\overline{z}}\right)=2.$$

Zatim, za te brojeve nači $|z|$ i $\arg(z)$.

<u>Zadatak 1.2.</u>

a) Odrediti bez primjene L'Hospitalovog pravila: $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left((1-\sin x)\cdot tgx\right)$

b) Odrediti: $\lim\limits_{x\to 0}(\ln x)^{\frac{-2}{ctgx}}$

. . . .

<u>Zadatak 2.1.</u> Ispitati funkciju $y=e^{2x}-e^{x}-2$ i nacrtati njen graf.

<u>Zadatak 2.2.</u> U kojoj točki $M_1(x_1, y_1)$ funkcija $f(x)=\frac{1}{4}\cdot\ln\frac{1+x}{1-x}-\frac{1}{2}\cdot arctgx$ ima tangentu paralelnu x osi?

<u>Napomena:</u> Za polaganje pismenog ispita potrebno je riješiti barem jedan zadatak iz obje grupe.

Rješenja:

Zadatak 1.1. $R_e\left(\frac{1}{z}\right)=1,\ I_m\left(\frac{1}{\overline{z}}\right)=2;$

$$z=x+iy \Rightarrow \frac{1}{z}=\frac{1}{x+iy}=\frac{1}{x+iy}\cdot\frac{x-iy}{x-iy}=\frac{x-iy}{x^2+y^2} \Rightarrow R_e\left(\frac{1}{z}\right)=\frac{x}{x^2+y^2}=1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x}{x^2+y^2}=1 \;\Big|\cdot\left(x^2+y^2\right),\quad uz\quad x^2+y^2\neq 0,\quad tj.\quad x\neq 0\quad i\quad y\neq 0$$

$$\boxed{\Rightarrow\quad x=x^2+y^2}\qquad (1)$$

$$\overline{z}=x-iy \Rightarrow \frac{1}{\overline{z}}=\frac{1}{x-iy}=\frac{1}{x-iy}\cdot\frac{x+iy}{x+iy}=\frac{x+iy}{x^2+y^2} \Rightarrow I_m\left(\frac{1}{\overline{z}}\right)=\frac{y}{x^2+y^2}=2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{y}{x^2+y^2}=2 \;\Big|\cdot\left(x^2+y^2\right),\quad uz\quad x^2+y^2\neq 0,\quad tj.\quad x\neq 0\quad i\quad y\neq 0$$

$$\boxed{\Rightarrow\quad y=2x^2+2y^2}\qquad (2)$$

Prva jednadžba daje: $x=x^2+y^2 \Rightarrow y^2=x-x^2 \Rightarrow y=\pm\sqrt{x-x^2}$, što kad uvrstimo u drugu jednadžbu daje:

$$\pm\sqrt{x-x^2}=2x^2+2\cdot\left(x-x^2\right) \Leftrightarrow \pm\sqrt{x-x^2}=2x^2+2x-2x^2 \Leftrightarrow \pm\sqrt{x-x^2}=2x \Leftrightarrow$$

$$x-x^2=4x^2 \Leftrightarrow 5x^2-x=0 \Leftrightarrow x\cdot(5x-1)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cancel{x_1=0}, & zbog\ \ uvjeta \\ x_2=\dfrac{1}{5} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cancel{y_1=-\dfrac{2}{5}}, & zbog\quad \dfrac{y}{x^2+y^2}=2 \\ y_2=\dfrac{2}{5} \end{cases} \Rightarrow \boxed{z=\frac{1}{5}+\frac{2}{5}i}$$

$$\Rightarrow \boxed{|z|=\sqrt{\frac{1}{5}},\qquad \arg(z)=arctg2}.$$

Zadatak 1.2.

a) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\left(1-\sin x\right)\cdot tgx\right)$ = ?

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\left(1-\sin x\right)\cdot tgx\right)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\left(1-\sin x\right)\cdot\sin x}{\cos x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\left(1-\sin x\right)\cdot\sin x}{\sqrt{1-\sin^2 x}}=$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\left(1-\sin x\right)\cdot\sin x}{\sqrt{\left(1-\sin x\right)\cdot\left(1+\sin x\right)}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt{\left(1-\sin x\right)}\cdot\sin x}{\sqrt{1+\sin x}}=$$

$$=\frac{0\cdot 1}{2}=0;$$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\ln x\right)^{\frac{-2}{ctgx}}$ = ?

Kako je $\lim\limits_{x\to 0}\left(\ln x\right)^{\frac{-2}{ctgx}}=\left[\infty^0\right]$, prvo ćemo tražiti logaritam gornjeg limesa,

tj. $\ln\left[\lim\limits_{x\to 0}\left(\ln x\right)^{\frac{-2}{ctgx}}\right]$, a to je zbog svojstva limesa jednako $\lim\limits_{x\to 0}\left[\ln\left(\ln x\right)^{\frac{-2}{ctgx}}\right]$,

pa je:

$$\lim_{x\to 0}\ln\left(\ln x\right)^{\frac{-2}{ctgx}}=\lim_{x\to 0}\left(-\frac{2}{ctgx}\right)\cdot\ln\left(\ln x\right)=-2\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(\ln x\right)}{ctgx}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=L.P.=$$

$$=-2\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\ln x}\cdot\frac{1}{x}}{\frac{-1}{\sin^2 x}}=-2\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\ln x}\cdot\frac{1}{x}}{\frac{-1}{\sin^2 x}}=2\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x\cdot\ln x}=2\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\cdot\sin x}{x\cdot\ln x}=$$

$$=2\cdot 1\cdot 0=0.$$

Dakle dobili smo da vrijedi: $\ln\left[\lim\limits_{x\to 0}\left(\ln x\right)^{\frac{-2}{ctgx}}\right]=0$ <=> $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\left(\ln x\right)^{\frac{-2}{ctgx}}=e^0=1}$.

Zadatak 2.1. $y=e^{2x}-e^x-2$

1° D(f) = $\Re$;

2° Nule funkcije:

$f\left(x\right)=0$ <=> $e^{2x}-e^x-2=0$

Supstitucijom $e^x=t$ gornja jednadžba postaje:

$t^2 - t - 2 = 0$ <=> $t_1 = 2,\quad t_2 = -1$ <=> $\boxed{x_1 = \ln 2}$, $\cancel{x_2 = \ln(-1)}$ **;**

3° (Ne)parnost funkcije: $f(-x) = e^{-2x} - e^{-x} - 2 \neq \pm f(x)$ => <u>funkcija ni parna ni neparna.</u>

4° V.A. nema, jer nema točaka prekida;

K.A. / H.A.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{2x} - e^{x} - 2 = +\infty,$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} e^{2x} - e^{x} - 2 = -2 \quad \Rightarrow \quad y = -2$ je lijeva H.A.

$k = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0 \quad \Rightarrow$ nema K.A.

5° Stacionarne točke:

$y' = 2\cdot e^{2x} - e^{x} = e^{x}\cdot\left(2\cdot e^{x} - 1\right);$

$y' = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2\cdot e^{x} - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad e^{x} = \dfrac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad x = \ln\dfrac{1}{2}$ je stacionarna točka.

6° $D(y') = \Re;$

7° Točke infleksije i ekstremne točke:

$y'' = 4\cdot e^{2x} - e^{x} = e^{x}\cdot\left(4\cdot e^{x} - 1\right);$

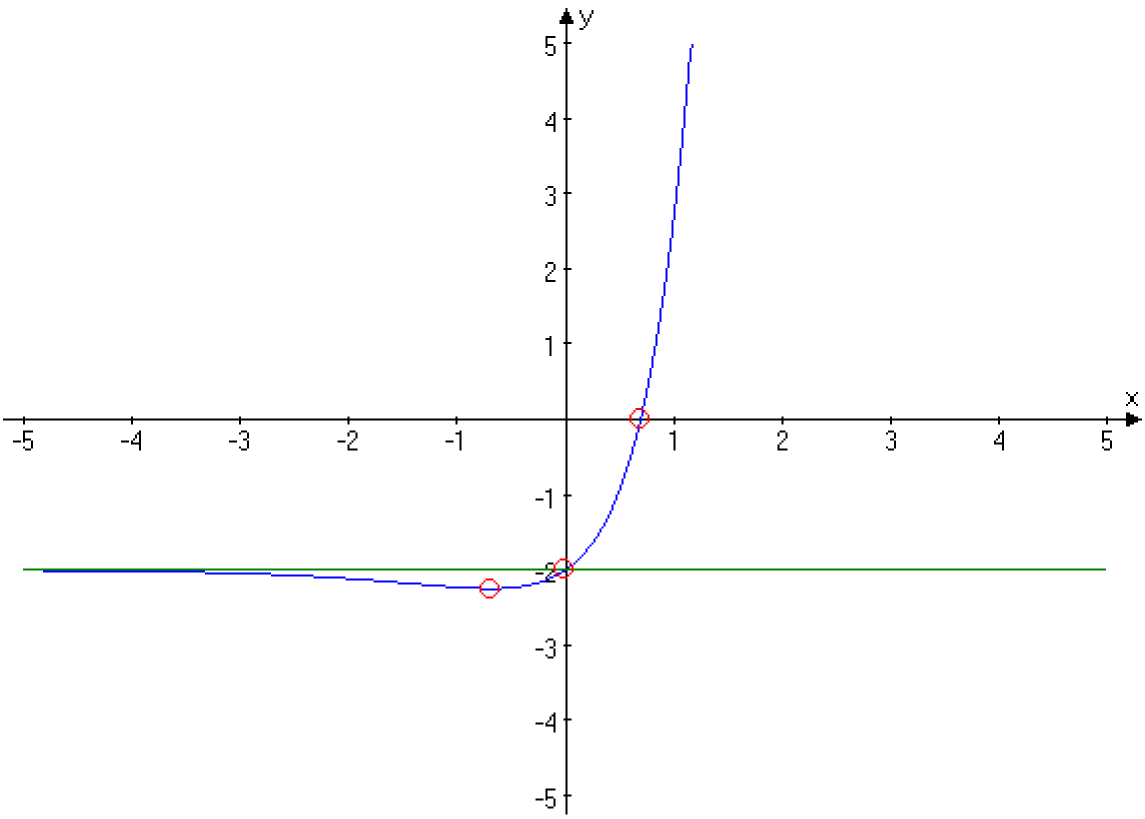
$y'' = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 4\cdot e^{x} - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad e^{x} = \dfrac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad x = \ln\dfrac{1}{4}$ je točka infleksije;

$y''\left(\ln\dfrac{1}{2}\right) = e^{\ln\frac{1}{2}}\cdot\left(4\cdot e^{\ln\frac{1}{2}} - 1\right) = \dfrac{1}{2}\cdot\left(4\cdot\dfrac{1}{2} - 1\right) = \dfrac{1}{2} > 0 \quad \Rightarrow \quad x = \ln\dfrac{1}{2}$ je točka lokalnog minimuma, i vrijedi $\boxed{y_{\min} = -\dfrac{9}{4}}$.

8° Tok funkcije:

x	$-\infty$		$\ln\frac{1}{4}$		$\ln\frac{1}{2}$		$\ln 2$		$+\infty$
y''		$-$	**0**	$+$		$+$		$+$	
y'		$-$		$-$	**0**	$+$		$+$	
y		$\searrow, \cap$	**inf**	$\searrow, \cup$	**min**	$\nearrow, \cup$	**0**	$\nearrow, \cup$	

9° Graf funkcije:



Zadatak 2.2. $f(x)=\frac{1}{4}\cdot\ln\frac{1+x}{1-x}-\frac{1}{2}\cdot arctgx$

$$f'(x)=\frac{1}{4}\cdot\frac{1-x}{1+x}\cdot\frac{1-x+1+x}{(1-x)^2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+x^2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-x^2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+x^2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1+x^2-1+x^2}{(1-x^2)\cdot(1+x^2)}=\frac{x^2}{1+x^4}$$

$f'(x)=0 \quad\Leftrightarrow\quad x^2=0 \quad\Leftrightarrow\quad \boxed{x=0}$ je stacionarna točka funkcije.

Za tangentu na krivulju (graf funkcije) u nekoj točki vrijedi da će ona biti paralelna s x osi ako je prva derivacija te funkcije u toj točki jednaka nuli pa je točka x = 0 upravo točka s traženim svojstvom.

Uvrstimo li vrijednost x = 0 u funkciju $f(x)=\frac{1}{4}\cdot\ln\frac{1+x}{1-x}-\frac{1}{2}\cdot arctgx$ dobivamo $f(0)=0$, pa točka s traženim svojstvom ima koordinate (0, 0), tj. vrijedi $\boxed{M_1(0, 0)}$.