Zadaci na pismenom ispitu iz Matematičke analize I (Grupa A, 30. 04. 2003.) s rješenjima

Zadatak 1.1. Odrediti kompleksan broj z iz uvjeta:

$$\left|\frac{z}{z+1}\right| = 1, \qquad \frac{z}{\bar{z}} = i.$$

Zatim naći $\sqrt[3]{z}$, $|z|$ i $Arg(z)$.

Zadatak 1.2. Matematičkom indukcijom dokazati

$$(2n)! < 2^{2n}(n!)^2 .$$

…

Zadatak 2.1. Ispitati tok i nacrtati graf funkcije

$$y = x \cdot e^{-x^2} .$$

Zadatak 2.2. Odrediti bez primjene L'Hospitalovog pravila:

a) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\operatorname{ctg} x - \operatorname{ctg} a}{x-a}$;

b) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\sin x - \sin a}{x-a}$.

Napomena: Za polaganje pismenog ispita potrebno je riješiti barem jedan zadatak iz obje grupe.

Rješenja:

Zadatak 1.1.

$$\left|\frac{z}{z+1}\right| = 1 \Leftrightarrow \frac{|z|}{|z+1|} = 1 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{(x+1)^2+y^2}} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{(x+1)^2+y^2} \quad |^2$$

$$x^2 + \cancel{y^2} = (x+1)^2 + \cancel{y^2} \Leftrightarrow \cancel{x^2} = \cancel{x^2} + 2x + 1 \Leftrightarrow 2x = -1 \Leftrightarrow \boxed{x = -\frac{1}{2}.}$$

$$\frac{z}{\bar{z}} = i \Leftrightarrow z = \bar{z} \cdot i \Leftrightarrow x + y \cdot i = x \cdot i + y \Leftrightarrow y \cdot (i - 1) = x \cdot (i - 1) \Leftrightarrow y = x \Rightarrow \boxed{y = -\frac{1}{2}.}$$

$$\boxed{\Rightarrow z = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot i.}$$

Sada je: $|z| = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{2}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\quad Arg(z) = arctg \frac{-\frac{1}{2}}{-\frac{1}{2}} = \frac{5\pi}{4}$.

$$\Rightarrow z = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \left(\cos\frac{5\pi}{4} + i \sin\frac{5\pi}{4} \right) \quad \Rightarrow \quad \sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{\frac{\sqrt{2}}{2}} \cdot \left(\cos\frac{\frac{5\pi}{4} + 2k\pi}{3} + i \sin\frac{\frac{5\pi}{4} + 2k\pi}{3} \right).$$

$$\boxed{\Rightarrow \begin{cases} z_0 = \sqrt[3]{\frac{\sqrt{2}}{2}} \cdot \left(\cos\frac{5\pi}{12} + i \sin\frac{5\pi}{12} \right), & k = 0; \\ z_1 = \sqrt[3]{\frac{\sqrt{2}}{2}} \cdot \left(\cos\frac{13\pi}{12} + i \sin\frac{13\pi}{12} \right), & k = 1; \\ z_2 = \sqrt[3]{\frac{\sqrt{2}}{2}} \cdot \left(\cos\frac{21\pi}{12} + i \sin\frac{21\pi}{12} \right), & k = 2. \end{cases}}$$

Zadatak 1.2. T: $(2n)! < 2^{2n}(n!)^2, \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Tvrdnju dokazujemo primjenom na□ela matemati□ke indukcije.

Za $\boxed{n = 1}$ imamo: $(2)! < 2^2(1)^2 \Leftrightarrow 2 < 4$, □to je istina, dakle, tvrdnja vrijedi za n = 1.

Pretpostavimo sada da tvrdnja vrijedi za neko $\boxed{n \in \mathbb{N}}$, tj. da vrijedi: $(2n)! < 2^{2n}(n!)^2$.

Pogledajmo □to vrijedi za broj $\boxed{n+1 \in \mathbb{N}}$:

$$(2(n+1))! = (2n+2)! = (2n)! \cdot (2n+1) \cdot (2n+2) \overset{\textit{po pretpostavci}}{<} 2^{2n}(n!)^2 \cdot (2n+1) \cdot (2n+2) <$$

$$< 2^{2n}(n!)^2 \cdot (2n+2)^2 = 2^{2n}(n!)^2 \cdot 2^2 \cdot (n+1)^2 = 2^{2n+2} \cdot (n! \cdot (n+1))^2 = 2^{2(n+1)} \cdot ((n+1)!)^2$$

□to je i trebalo dokazati. Dakle, po na□elu matemati□ke indukcije gornja nejednadžba je dokazana $\forall n \in \mathbb{N}$.

…

Zadatak 2.1.

1° Podru□je definicije funkcije: $\mathscr{D}(f) = \mathbb{R}$;

2° Nule funkcije: $x \cdot e^{-x^2} = 0 \Leftrightarrow x = 0$ => <u>x = 0 je nula funkcije</u>;

3° (Ne)parnost funkcije: $f(-x) = -x \cdot e^{-(-x)^2} = -x \cdot e^{-x^2} = -f(x)$ => funkcija je neparna, tj. graf joj je simetri□an obzirom na ishodi□te koordinatnog sustava.

4° V. A. nema

H. A. / K. A.

$$\lim_{x\to\infty} y = \lim_{x\to\infty} x\cdot e^{-x^2} = \lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^{x^2}} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{2x\cdot e^{x^2}} = \frac{1}{\infty} = 0$$ => <u>y = 0 je H. A.</u> => nema K. A.

5° Stacionarne to□ke funkcije: $y' = e^{-x^2} + x\cdot(-2x)\cdot e^{-x^2} = e^{-x^2}\cdot\left(1-2x^2\right)$ => $y'=0$

<=> $1-2x^2=0$ <=> $\boxed{x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}}$, <u>□to su ujedno i stacionarne to□ke funkcije</u>.

6° To□ke infleksije i ekstremne to□ke funkcije:

$$y'' = -2x\cdot e^{-x^2}\cdot\left(1-2x^2\right) + e^{-x^2}\cdot(-4x) = e^{-x^2}\cdot\left(-2x+4x^3-4x\right) = e^{-x^2}\cdot\left(-6x+4x^3\right)$$ => $y''=0$

<=> $-6x+4x^3=0$ <=> $\boxed{x_1=0,\quad x_{2,3}=\pm\sqrt{\frac{3}{2}}}$, <u>□to su ujedno i to□ke infleksije funkcije</u>.

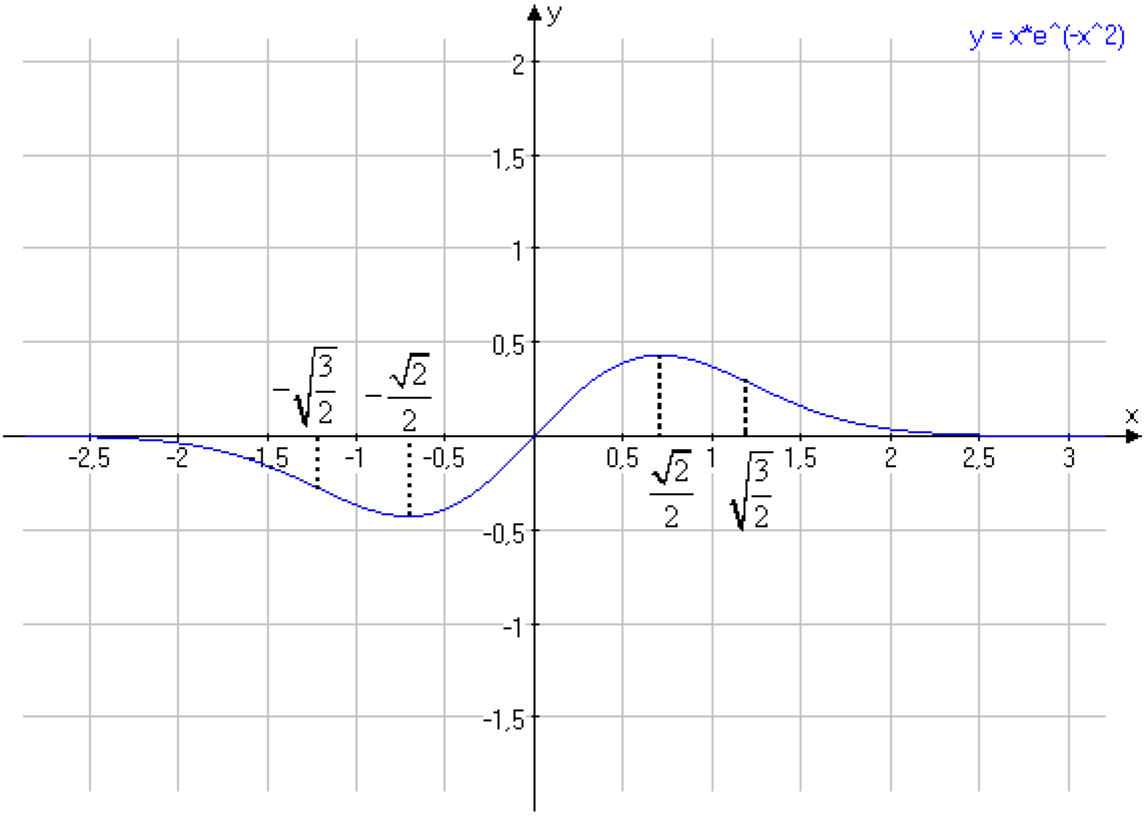
Nadalje, vrijedi: $y''\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)<0$ => za x = $\frac{\sqrt{2}}{2}$ <u>funkcija ima lokalni maksimum</u>,

$y''\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)>0$ => za x = $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ <u>funkcija ima lokalni minimum</u>.

7° Tijek funkcije:

x	$-\infty$	$-\sqrt{\frac{3}{2}}$		$-\frac{\sqrt{2}}{2}$		0		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		$\sqrt{\frac{3}{2}}$	$+\infty$
y''	–	**0**	+		+	**0**	–		–	**0**	+
y'	–		–	**0**	+		+	**0**	–		–
y	↘, ∩	inf	↘, ∪	min	↗, ∪	**0** inf	↗, ∩	max	↘, ∩	inf	↘, ∪

8° Graf funkcije:



Zadatak 2.2.

a) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\operatorname{ctg} x-\operatorname{ctg} a}{x-a}$ = ?

$$\lim_{x\to a}\frac{\operatorname{ctg} x-\operatorname{ctg} a}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{\sin(a-x)}{\sin x\cdot\sin a}\cdot\frac{1}{x-a}=\lim_{x\to a}\left(-\frac{\sin(a-x)}{a-x}\right)\cdot\frac{1}{\sin a}\cdot\lim_{x\to a}\cdot\frac{1}{\sin x}=\boxed{-\frac{1}{\sin^2 a}},$$

$$\boxed{a\neq k\pi,\quad k\in\mathbb{Z}};$$

b) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin x-\sin a}{x-a}$ = ?

$$\lim_{x\to a}\frac{\sin x-\sin a}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{2\cdot\sin\frac{x-a}{2}\cdot\cos\frac{x+a}{2}}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{\sin\frac{x-a}{2}}{\frac{x-a}{2}}\cdot\lim_{x\to a}\cos\frac{x+a}{2}=1\cdot\cos a=\boxed{\cos a}.$$