Kompleksni brojevi

Razni oblici zapisa kompleksnog broja:

$$z = x + i \cdot y = r \cdot (\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi) = r \cdot e^{i \cdot \varphi}$$

Zadaci:

1. Prikazati u trigonometrijskom obliku kompleksne brojeve z i nacrtati ih u Gaussovoj ravnini:

   a) $z = \sqrt{3} - i$; b) $z = -1 - i$; c) $z = 3$; d) $z = -2i$;

   e) $z = 5i$; f) $z = -4$; g) $z = 1 + \sin\frac{\pi}{7} + i \cdot \cos\frac{\pi}{7}$.

2. Naći produkt kompleksnih brojeva:

   a) $z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i \cdot \sin\frac{\pi}{6}\right)$, $z_2 = \sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i \cdot \sin\frac{\pi}{3}\right)$;

   b) $z_1 = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i \cdot \sin\frac{2\pi}{3}\right)$, $z_2 = 4\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i \cdot \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]$.

3. Izračunati $z_1 : z_2$ ako je:

   a) $z_1 = 4\left(\cos\frac{\pi}{6} + i \cdot \sin\frac{\pi}{6}\right)$, $z_2 = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i \cdot \sin\frac{2\pi}{3}\right)$;

   b) $z_1 = \sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i \cdot \sin\frac{\pi}{3}\right)$, $z_2 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i \cdot \sin\frac{\pi}{4}\right)$.

4. Napisati u trigonometrijskom obliku:

   a) $z = -\frac{1}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$; b) $z = -\cos\frac{\pi}{7} + i \cdot \sin\frac{\pi}{7}$.

5. Predstaviti kompleksni broj z u algebarskom obliku:

   a) $z = \dfrac{\left(i - \sqrt{3}\right)\left(\cos\frac{\pi}{12} - i \cdot \sin\frac{\pi}{12}\right)}{1 - i}$; b) $z = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right)^{13}$; c) $z = \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{20}$.

6. Primjenom Moivreove formule izračunati

   a) $\left[\cos\frac{\pi}{4} + i \cdot \sin\frac{\pi}{4}\right]^7$, b) $\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) - i \cdot \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]^{-2}$,

   i prikazati rezultate u algebarskom obliku.

7. Primjenom Moivreove formule i Newtonovog binomnog obrasca izračunati:
   a) cos 5x i sin 5x preko cos x i sin x;
   b) cos 6x i sin 6x.

8. Predstaviti u trigonometrijskom i algebarskom obliku $z = \left(\sqrt{3} - \mathrm{i}\right)^{00}$.

9. Odrediti modul i argument kompleksnog broja $z = \dfrac{1 + \mathrm{i} \cdot \sqrt{3}}{1 - \mathrm{i}}$.

10. Naći sve vrijednosti od $\sqrt[3]{\mathrm{i}}$.

11. Riješiti jednadžbu $z^6 + 64 = 0$. Rezultate prikazati u Gaussovoj ravnini.

12. Izračunati:
   a) $\sqrt[3]{-2 + 2\mathrm{i}}$; b) $\sqrt[8]{-1}$; c) $\sqrt{1 + \mathrm{i} \cdot \sqrt{3}}$; d) $\sqrt[5]{1 + \mathrm{i}}$.

13. Riješiti jednadžbu:
   a) $z^4 + 625 = 0$;
   b) $z^2 - 24 + 10\mathrm{i} = 0$; c) $z^2 + 2(\mathrm{i} - z) + 5 - 2\mathrm{i} = 0$.

14. Izračunaj ln z ako je:
   a) $z = 1 + \mathrm{i}$; c) $z = -3$;
   b) $z = 7\mathrm{i}$; d) $z = 3 - 4\mathrm{i}$.

15. Odrediti $n \in \mathbb{N}$ tako da je $\left(\dfrac{1+i}{1-1}\right)^n = 1.$

16. Izračunati vrijednost polinoma $P(z) = z^2 - z + 1$ ako je:
   a) $z = \dfrac{1}{2} - i \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2}$; b) $z = -\dfrac{1}{2} + i \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

17. Odrediti $f(1986) + f(1990)$ ako je $f(n) = \left(\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^n + \left(\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^n$.

18. Riješiti sljedeću jednadžbu (po nepoznatoj $z = x + i\,y$):
   a) $(1+i) \cdot x + (2+i) \cdot y = 5 + 3i$;
   b) $|z| - z = 1 + 2i$;
   c) $\begin{cases} |z - 2i| = |z| \\ |z - 1| = |z + i| \end{cases}$.

19. Među svim kompleksnim brojevima z takvim da je $|z|<2$ i $R_e\left(z\cdot(1+1)\right)\le 0$ nađi onaj broj kod kojeg je:

a) $R_e(z)$ najveće;

b) $R_e(z)$ najmanje;

c) $I_m(z)$ najveće;

d) $I_m(z)$ najmanje.

20. Ako je $S=\left\{z\in K \,\middle|\, |z-1-i|\le \frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$, nađi:

a) $\max|z|,\quad z\in S;$

b) $\min|z|,\quad z\in S;$

c) $\max\left(\arg(z)\right),\quad z\in S;$

d) $\min\left(\arg(z)\right),\quad z\in S.$

21. Riješiti jednadžbu: $\frac{16}{(\overline{z}-1)^3}-1+i\cdot\sqrt{3}=0.$

22. Izračunati: $\left(\sqrt{3}+i\right)^{2002}.$

23. Prikazati u trigonometrijskom obliku: $z=1+\sin\frac{\pi}{7}+i\cdot\cos\frac{\pi}{7}.$

24. Nađi produkt kompleksnih brojeva:

$$z_1=\sqrt{2}\cdot\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\cdot\sin\frac{2\pi}{3}\right)\quad i\quad z_2=4\sqrt{2}\cdot\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\cdot\sin\frac{\pi}{6}\right).$$

25. Nađi kvocijent kompleksnih brojeva:

$$z_1=\sqrt{2}\cdot\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\cdot\sin\frac{\pi}{6}\right)\quad i\quad z_2=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\cdot\sin\frac{2\pi}{3}\right).$$

26. Izračunati: $A=(1-i)^{\frac{3}{2}}.$

27. Uvjeriti se da je $(1+\cos\varphi+i\sin\varphi)^n=2^n\cdot\cos^n\frac{\varphi}{2}\cdot\left(\cos^n\frac{\varphi}{2}+i\sin\frac{\varphi}{2}\right).$

28. Odrediti sve kompleksne brojeve z za koje vrijedi:

a) $|z+i\,z|=2;$

b) $R_e\left(z^4\right)-\frac{1}{2}\cdot I_m\left(z^4\right)=\left[R_e\left(z^2\right)\right]^2,\quad I_m\left(z^2\right)=2\sqrt{2}.$

29. Odrediti kompleksan broj z iz uvjeta:

$$\left|\frac{z}{z+1}\right|=1, \quad \frac{z}{\bar{z}}=i.$$

Zatim nađi $\sqrt[3]{z}$, $|z|$ i $Arg(z)$.

Rješenje:

$$\left|\frac{z}{z+1}\right|=1 \Leftrightarrow \frac{|z|}{|z+1|}=1 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{(x+1)^2+y^2}}=1 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(x+1)^2+y^2} \quad |^2$$

$$x^2+\cancel{y^2}=(x+1)^2+\cancel{y^2} \Leftrightarrow \cancel{x^2}=\cancel{x^2}+2x+1 \Leftrightarrow 2x=-1 \Leftrightarrow \boxed{x=-\frac{1}{2}.}$$

$$\frac{z}{\bar{z}}=i \Leftrightarrow z=\bar{z}\cdot i \Leftrightarrow x+y\cdot i=x\cdot i+y \Leftrightarrow y\cdot(i-1)=x\cdot(i-1) \Leftrightarrow y=x \Rightarrow \boxed{y=-\frac{1}{2}.}$$

$$\boxed{\Rightarrow z=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot i.}$$

Sada je: $|z|=\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}=\sqrt{\frac{2}{4}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\quad Arg(z)=arctg\frac{-\frac{1}{2}}{-\frac{1}{2}}=\frac{5\pi}{4}.$

$$\Rightarrow z=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\left(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}\right) \quad \Rightarrow \quad \sqrt[3]{z}=\sqrt[3]{\frac{\sqrt{2}}{2}}\cdot\left(\cos\frac{\frac{5\pi}{4}+2k\pi}{3}+i\sin\frac{\frac{5\pi}{4}+2k\pi}{3}\right).$$

$$\boxed{\Rightarrow \begin{cases} z_0=\sqrt[3]{\frac{\sqrt{2}}{2}}\cdot\left(\cos\frac{5\pi}{12}+i\sin\frac{5\pi}{12}\right), & k=0; \\ z_1=\sqrt[3]{\frac{\sqrt{2}}{2}}\cdot\left(\cos\frac{13\pi}{12}+i\sin\frac{13\pi}{12}\right), & k=1; \\ z_2=\sqrt[3]{\frac{\sqrt{2}}{2}}\cdot\left(\cos\frac{21\pi}{12}+i\sin\frac{21\pi}{12}\right), & k=2. \end{cases}}$$