



Analitička geometrija

Zadaci:

1. Nađi jednačbu ravnine koja prolazi kroz točke $A(1, 2, 0)$, $B(-2, 1, -3)$ i $C(3, 4, -2)$.
[Rj: $2x - 3y - z + 4 = 0$]
2. Nađi jednačbu ravnine koja prolazi kroz točku $M_1(1, -1, 2)$, a paralelna je sa ravinom $x + 2y - 3z + 5 = 0$.
[Rj: $x + 2y - 3z + 7 = 0$]
3. Nađi jednačbu ravnine koja prolazi kroz točku $M_1(1, -1, 2)$, a okomita je na pravac koji prolazi kroz točke $A(2, 1, -3)$ i $B(1, -2, 3)$.
[Rj: $x + 3y - 6z + 14 = 0$]
4. Nađi kut između ravnina $x + y - 2z + 3 = 0$ i $x - 2y + z + 4 = 0$.
[Rj: $\pi/3$]
5. Dana je dužina s krajevima $A(2, -3, 1)$ i $B(-4, 5, 3)$. Nađi jednačbu ravnine koja prolazi kroz sredinu t dužine i stoji na njoj okomito.
[Rj: $3x - 4y - z + 9 = 0$]
6. Nađi jednačbu ravnine koja prolazi kroz točke $A(1, -2, 3)$ i $B(2, 1, -1)$ i okomita je na ravinu $x + 2y - 3z + 1 = 0$.
[Rj: $x + y + z - 2 = 0$]
7. Nađi jednačbu ravnine koja prolazi kroz točke $A(1, 0, 4)$ i $B(-2, 1, 5)$, a paralelna je s pravcem koji prolazi kroz točke $P(1, -2, 1)$ i $Q(2, 1, 3)$.
[Rj: $x - 7y + 10z - 41 = 0$]
8. Nađi jednačbu ravnine koja prolazi kroz točku $M_1(1, 2, -4)$, a podjednako je nagnuta prema koordinatnim osima.
[Rj: $x + y + z + 1 = 0$]
9. Pravac p prolazi kroz točku $P(1, -1, 1)$, a s koordinatnim osima gradi jednake kutove. Nađi jednačbu ravnine koja prolazi kroz pravac p i točku $Q(2, 1, 3)$.
[Rj: $y - z + 2 = 0$]
10. Pravac p prolazi kroz točku $A(1, -2, 0)$ i ima pravac $1 : 2 : 3$. Nađi jednačbu ravnine koja prolazi kroz točku $M_1(2, 1, 4)$ i pravac p .
[Rj: $x + y - z + 1 = 0$]



11. Nađi jednadžbu ravnine koja je okomita na pravac koji spaja koordinatni početak sa točkom $P(2, -2, 1)$, a udaljena je za 6 jedinica od koordinatnog početka.
[Rj: $2x - 2y + z \pm 18 = 0$]
12. Nađi jednadžbu ravnine koja na osima Ox i Oz gradi odsječke $a = 3$ i $c = -2$, a paralelna je sa osi Oy .
[Rj: $2x - 3z - 6 = 0$]
13. Nađi jednadžbu ravnine koja prolazi kroz točke $A(-1, 2, 5)$ i $B(3, -1, 4)$, a paralelna je sa osi Oz .
[Rj: $3x + 4y - 5 = 0$]
14. Nađi jednadžbu ravnine koja prolazi kroz točku $M_1(2, -1, 3)$ i os Oz .
[Rj: $x + 2y = 0$]
15. Nađi jednadžbu ravnine koja na osima Ox i Oy gradi jednake odsječke, a na osi Oz dva puta veći odsječak i koja prolazi kroz točku $M_1(1, -1, 1)$.
[Rj: $2x + 2y + z - 1 = 0$]
16. Nađi odsječke što ih na koordinatnim osima pravi ravnina $6x + 4y - 3z - 12 = 0$.
[Rj: $a = 2, b = 3, c = -4$]
17. U ravnini $2x + 3y - z + 4 = 0$ leži točka M . Projekcija točke M na ravninu Oxy je točka $N(1, -1, 0)$. Koje su koordinate točke M ?
[Rj: $M(1, -1, 3)$]
18. Odrediti vrijednost parametra λ tako da vektor $\vec{a} = (1, -2, \lambda)$ bude paralelan sa ravinom $2x + 3y + z - 4 = 0$.
[Rj: $\lambda = 4$]
19. Kroz točke $A(-1, 1, -1)$ i $B(1, 2, 1)$ povučen je pravac p_1 , a kroz točke $C(-1, 2, -2)$ i $D(0, 4, 1)$ pravac p_2 . Nađi jednadžbu ravnine koja prolazi kroz točku $M(3, -2, 0)$ a paralelna je sa pravcima p_1 i p_2 .
[Rj: $x + 4y - 3z + 5 = 0$]
20. Nađi jednadžbu ravnine koja prolazi kroz točku $M_1(1, -1, 2)$ a okomita je na dvije ravnine $x - 2z + 3 = 0$ i $2x + y - z = 0$.
[Rj: $2x - 3y + z - 7 = 0$]
21. Nađi zajedničku točku date tri ravnine: $x - 2y + z - 5 = 0$, $2x + y - z + 1 = 0$, $3x + 4y + 2z - 3 = 0$.
[Rj: $T(1, -1, 2)$]



22. Odrediti λ i μ tako da ravnine $6x + 4y + 2\lambda z - 1 = 0$ i $3x - 2\mu y + z + 5 = 0$ budu paralelne.
[Rj: $\lambda = 1, \mu = -1$]
23. Odrediti parametar λ tako da ravnine $2x - 3y + \lambda z + 1 = 0$ i $5x + 2y + z - 3 = 0$ budu okomite.
[Rj: $\lambda = -4$]
24. Nađi jednadžbu ravnine koja je okomita na ravninu $x - 2y + 3z + 1 = 0$ i siječe je po pravcu koji leži u koordinatnoj ravnini Oxy .
[Rj: $3x - 6y - 5z + 3 = 0$]
25. Pravac p_1 prolazi kroz točke $A(2, 1, 3)$ i $B(-1, 2, 1)$, a pravac p_2 prolazi kroz točke $C(2, -1, 1)$ i $D(1, 1, -1)$. Nađi jednadžbu ravnine koja je podjednako udaljena od pravaca p_1 i p_2 .
[Rj: $2x - 4y - 5z + 6 = 0$]
26. Pokazati da ravnine $2x - 3y + z + 3 = 0$, $x - 8y - 2z - 1 = 0$ i $4x + 3y - 4z + 2 = 0$ čine bočne strane jedne trostrane prizme.
27. Pokazati da ravnine $2x - y + 2z - 1 = 0$, $3x + y - z + 3 = 0$ i $4x + 3y - 4z + 7 = 0$ prolaze kroz jedan pravac.
28. Nađi jednadžbu pravca koji prolazi točkom $A(-1, 2, 1)$ a paralelan je sa vektorom $\vec{p} = (2, -3, 1)$.
[Rj: $\frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z-1}{1}$]
29. Nađi jednadžbu pravca koji prolazi kroz točku $M_1(2, 0, -3)$ a paralelan je sa pravcem koji spaja koordinatni početak sa točkom $P(1, 4, 2)$.
[Rj: $\frac{x-2}{1} = \frac{y}{4} = \frac{z+3}{2}$]
30. Kroz točke $A(1, -2, 2)$ i $B(2, 1, 4)$ povučen je pravac p . Nađi jednadžbu pravca koji prolazi kroz točku $M_1(2, -1, 3)$ a paralelan je sa pravcem p .
[Rj: $\frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-3}{2}$]
31. Nađi jednadžbu pravca koji prolazi kroz $M_1(-1, 1, -1)$ i okomit je na ravninu $2x - 3y + z - 4 = 0$.
[Rj: $\frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z+1}{1}$]



32. Nađi jednadžbu pravca koji prolazi kroz točke $A(2, 1, 3)$ i $B(4, 0, 5)$.

$$\left[\text{Rj: } \frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-3}{2} \right]$$

33. Nađi jednadžbu pravca koji prolazi kroz $M_1(-2, 4, 3)$ a paralelan je s pravcem $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-1}{-1}$.

$$\left[\text{Rj: } \frac{x+2}{2} = \frac{y-4}{3} = \frac{z-3}{-1} \right]$$

34. Nađi jednadžbu pravca koji prolazi kroz $M_1(3, -1, 2)$ a paralelan je s pravcem $\left. \begin{array}{l} 2x - 3y + z - 1 = 0 \\ x + 2y - z + 3 = 0 \end{array} \right\}$.

$$\left[\text{Rj: } \frac{x-3}{1} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-2}{7} \right]$$

35. Nađi jednadžbu pravca koji prolazi kroz točku $M_1(-2, 3, -1)$ a paralelan je s osi Oy .

$$\left[\text{Rj: } \left. \begin{array}{l} x + 2 = 0 \\ z + 1 = 0 \end{array} \right\} \right]$$

36. Nađi jednadžbu pravca koji prolazi kroz točku $M_1(3, 1, -4)$ a sa koordinatnim osima gradi kutove 60° , 45° , 60° .

$$\left[\text{Rj: } \frac{x-3}{1} = \frac{y-1}{\sqrt{2}} = \frac{z+4}{1} \right]$$

37. Nađi kut između pravaca $p_1 \dots x-3 = \frac{y+4}{-2} = z$ i $p_2 \dots x+5 = y+3 = \frac{z+1}{-2}$

$$[\text{Rj: } \varphi = \pi/3]$$

38. Nađi kosinuse kutova pravca $\left. \begin{array}{l} 5x + 7y + 4z - 3 = 0 \\ 2x + 3y + 2z + 5 = 0 \end{array} \right\}$.

$$[\text{Rj: } 2/3, -2/3, 1/3]$$

39. Nađi kut između pravaca $p_1 \dots \left. \begin{array}{l} x + y + z + 1 = 0 \\ x - 3y - z - 2 = 0 \end{array} \right\}$ i $p_2 \dots \left. \begin{array}{l} 4x + 5y + 6z - 7 = 0 \\ 3x + 2y + z + 3 = 0 \end{array} \right\}$.

$$[\text{Rj: } \varphi = \pi/3]$$

40. Nađi kut između pravca $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{-1}$ i ravnine $3x + y + 2z - 4 = 0$.

$$[\text{Rj: } \varphi = \pi/6]$$



41. Nađi kut između pravca $\left. \begin{array}{l} x + y + z - 4 = 0 \\ 2x - 4y - z - 5 = 0 \end{array} \right\}$ i ravnine $x - z + 1 = 0$.
[Rj: $\varphi = \pi/3$]
42. Nađi kut između pravca $\left. \begin{array}{l} x + y + z - 4 = 0 \\ 2x - 4y - z - 5 = 0 \end{array} \right\}$ i ravnine $x - y + 1 = 0$.
[Rj: $\varphi = 0$]
43. Nađi jednadžbu ravnine koja prolazi točkom $M_1(-1, 2, 1)$ a okomita je na pravac $\left. \begin{array}{l} x - 2y + 3z - 4 = 0 \\ x + y + z - 2 = 0 \end{array} \right\}$.
[Rj: $5x - 2y - 3z + 12 = 0$]
44. Nađi jednadžbu ravnine koja prolazi kroz pravac $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-1}{-1}$ i točku $M_1(2, 1, 3)$.
[Rj: $9x - 5y + 3z - 22 = 0$]
45. Nađi jednadžbu ravnine koja prolazi kroz točku $A(-1, 5, 0)$ a paralelna je sa pravcima $p_1 \dots \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z-1}{1}$ i $p_2 \dots \frac{x+2}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+3}{-2}$.
[Rj: $4x + 3y + z - 11 = 0$]
46. Nađi jednadžbu ravnine koja prolazi kroz točku $A(1, 2, -4)$ a paralelna je sa pravcima $p_1 \dots \left. \begin{array}{l} 3x + 4y - 2z + 3 = 0 \\ 4x + 5y - z + 2 = 0 \end{array} \right\}$ i $p_2 \dots \left. \begin{array}{l} 2x - 3y + z + 1 = 0 \\ 3x - 2y + 2z + 3 = 0 \end{array} \right\}$.
[Rj: $x + y + z + 1 = 0$]
47. Nađi jednadžbu ravnine koja prolazi kroz pravac $x = y = z$ i paralelna je s pravcem $x = 2y + 1 = z - 3$.
[Rj: $x - z = 0$]
48. Nađi jednadžbu ravnine koja prolazi kroz pravac $\left. \begin{array}{l} 2x + 3y + z - 1 = 0 \\ 3x + 4y + 2z - 2 = 0 \end{array} \right\}$ i paralelna je s pravcem $\left. \begin{array}{l} 3x - 2y + 4z + 1 = 0 \\ 2x - 3y + 3z + 5 = 0 \end{array} \right\}$.
[Rj: $x + y + z - 1 = 0$]
49. Nađi jednadžbu ravnine koja prolazi kroz točke $A(1, -1, 2)$ i $B(1, 3, 0)$ a okomita je na pravac koji prolazi kroz točke $P(1, 2, -3)$ i $Q(2, 3, -1)$. Ispitati prvo da li je zadatak moguć (nepotrebna jedna od točaka A ili B).
[Rj: $x + y + 2z - 4 = 0$]

50. Nađi jednadžbu ravnine koja prolazi kroz pravac $\left. \begin{array}{l} x + y + z - 2 = 0 \\ 2x + 3y + 3z + 1 = 0 \end{array} \right\}$ a
okomita je na ravninu $2x - 3y + z - 1 = 0$.
[Rj: $x + 2y + 4z + 3 = 0$]
51. Nađi projekciju pravca $\left. \begin{array}{l} x + y + z - 2 = 0 \\ x + 2y + z - 2 = 0 \end{array} \right\}$ na ravninu $3x + y + 3z - 1 = 0$.
[Rj: $\left. \begin{array}{l} 3x + y + 3z - 1 = 0 \\ x - 6y + z - 2 = 0 \end{array} \right\}$]
52. Nađi ortogonalnu algebarsku projekciju vektora $\vec{a} = (2, 1, -3)$ na
pravac određen vektorom $\vec{p} = (2, 2, 1)$.
[Rj: $\text{pr } \vec{a} = |\vec{a}| \cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{p}}{|\vec{p}|} = 1$]
53. Dužina sa krajevima $A(2, 1, 3)$ i $B(4, 4, 6)$ projicirana je ortogonalno
na pravac koji prolazi kroz točke $P(1, 2, 1)$ i $Q(2, -1, 2)$. Odredi duljinu
te projekcije.
[Rj: $\overline{A'B'} = \frac{4}{\sqrt{11}}$]
54. Date su točke $A(3, -2, 1)$ i $B(1, 4, 1)$. Vektor $\overrightarrow{AB}$ projiciran je
ortogonalno na pravac p koji sa koordinatnim osima gradi kutove od
 60° , 60° i 45° . Nađi duljinu ove projekcije.
[Rj: $\overline{A'B'} = 2$]
55. Date su točke $A(1, -1, 1)$ i $B(3, 2, 3)$. Nađi duljinu projekcije dužine
 $\overline{AB}$ na pravac $x = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{2}$.
[Rj: $\overline{A'B'} = 4$]
56. Kroz točke $A(-1, 0, 1)$ i $B(1, 2, 3)$ povučen je pravac p . Nađi na pravcu
 p onu točku koja je od točke $S(2, -1, 1)$ udaljena za 3 jedinice.
[Rj: $M_1(0, 1, 2)$, $M_2(-2/3, 1/3, 4/3)$]
57. Odrediti λ tako da pravac $\left. \begin{array}{l} 2x - 3y + \lambda z - 6 = 0 \\ x + 2y - z + 3 = 0 \end{array} \right\}$ siječe os Oz .
[Rj: $\lambda = 2$]
58. Odrediti λ tako da pravac $\frac{x-4}{\lambda} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-3}{1}$ siječe os Oz .
[Rj: $\lambda = -6$]

59. Odrediti λ tako da pravac $\frac{x-2}{-1} = \frac{y+\lambda}{3} = \frac{z-4}{2}$ siječe os Oz.
[Rj: $\lambda = 6$]
60. Nađi jednadžbu ravnine koja je podjednako udaljena od pravaca $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-2}{-1}$ i $\frac{x+3}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{4}$.
[Rj: $10x - 9y - 7z + 8 = 0$]
61. Nađi jednadžbu pravca koji prolazi kroz koordinatni poèetak i siječe pravce $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z}{1}$ i $\frac{x+2}{-1} = \frac{y}{2} = \frac{z-3}{-2}$.
[Rj: $\left. \begin{array}{l} 2x + y - z = 0 \\ 6x + 7y + 4z = 0 \end{array} \right\}$]
62. Nađi jednadžbu pravca koji prolazi kroz točku $M_1(1, -1, 2)$ a pravac $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z}{1}$ siječe pod pravim kutom.
[Rj: $\left. \begin{array}{l} 3x + 2y - 1 = 0 \\ 2x - 3y + z - 7 = 0 \end{array} \right\}$]
63. Kroz točku $M(1, -2, 1)$ povučen je pravac p koji siječe pravce $p_1 \dots \frac{x+1}{-1} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-1}{2}$ i $p_2 \dots \frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{1}$. Nađi jednadžbu pravca p i koordinate toèaka P_1 i P_2 u kojima pravac p siječe date pravce p_1 i p_2 .
[Rj: $\left. \begin{array}{l} x - 2y + z - 6 = 0 \\ 4x + 2y - z + 1 = 0 \end{array} \right\}; P_1(1, -4, -3); P_2(1, -5/3, 5/3)$]
64. Nađi prodor pravca $\frac{x-3}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-1}{-2}$ kroz ravninu $3x + 2y - z + 4 = 0$.
[Rj: $P(1, -2, 3)$]
65. Nađi prodor pravca $\left. \begin{array}{l} x - y + z - 3 = 0 \\ 2x + y - 4z + 3 = 0 \end{array} \right\}$ kroz ravninu $x + 2y - 3z + 4 = 0$.
[Rj: $P(1, -1, 1)$]
66. Nađi projekciju toèke $A(4, 3, 1)$ na pravac $\frac{x-3}{2} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z-2}{1}$.
[Rj: $A'(1, 1, 1)$]
67. Nađi projekciju toèke $P(3, 2, 0)$ na pravac $\left. \begin{array}{l} 3x + 2y - 5 = 0 \\ y + 3z - 4 = 0 \end{array} \right\}$ [Rj: $P'(1, 1, 1)$]



68. Nađi točku P na pravcu $\frac{x+3}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-3}{-1}$ koja je podjednako udaljena od točaka $A(1, -2, 3)$ i $B(3, 4, 1)$. [Rj: $P(-1, 2, 2)$]
69. Kroz koordinatni početak povučen je pravac p paralelno s vektorom $\vec{p} = (1, -2, 3)$. Pravac p probada ravninu $x + y + z - 4 = 0$ u točki P . Izračunati duljinu $\overline{OP}$. [Rj: $\overline{OP} = 2\sqrt{14}$]
70. Pravac povučen iz koordinatnog početka normalno na ravninu koja prolazi kroz točke $A(4, -1, 0)$, $B(2, -3, 2)$ i $C(5, 1, 3)$ prodire kroz ovu ravninu u točki P . Nađi koordinate točke P . [Rj: $P(1, -2, 1)$]
71. Nađi koordinate točke B koja je simetrična sa točkom $A(1, -2, 3)$ u odnosu na ravninu $x + 3y - z - 3 = 0$. [Rj: $B(3, 4, 1)$]
72. Nađi koordinate točke B koja je simetrična sa točkom $A(0, 1, 1)$ u odnosu na pravac $\frac{x-3}{5} = \frac{y+1}{-5} = \frac{z-2}{2}$. [Rj: $B(1, 2, 1)$]
73. Pokazati da pravac $\frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-3}{1}$ leži u ravnini $x - 2y + z - 3 = 0$
74. Ispitati uzajamni položaj pravca $\left. \begin{array}{l} 3x - 2y + 4z + 5 = 0 \\ 4x - y + 5z - 7 = 0 \end{array} \right\}$ i ravnine $x + y + z + 1 = 0$. [Rj: pravac je $\parallel$ sa ravninom i ne leži u njoj]
75. Ispitati uzajamni položaj pravca $\left. \begin{array}{l} x + y + z - 4 = 0 \\ 2x - 4y - z - 5 = 0 \end{array} \right\}$ i ravnine $x - y + 1 = 0$. [Rj: pravac je paralelan sa ravninom i leži u njoj]
75. Dana je ravnina $\pi \dots x + 3y - z + 1 = 0$ i pravac $p \dots \frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{1}$. Kroz točku P presjeka ravnine π i pravca p povući pravac p_1 okomit na dani pravac p . [Rj: $\frac{x-2}{2} = \frac{y+1/2}{-3} = \frac{z-3/2}{-7}$]
76. Dana je ravnina $\pi \dots x + 2y + 2z - 18 = 0$. Točka P je projekcija ishodišta na ravninu π . Nađi jednadžbu pravca koji prolazi kroz točku P , a paralelan je sa projekcijom pravca $\frac{x-3}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-4}{1}$ na ravninu π . [Rj: $\frac{x-2}{16} = \frac{y-4}{-13} = \frac{z-5}{5}$]