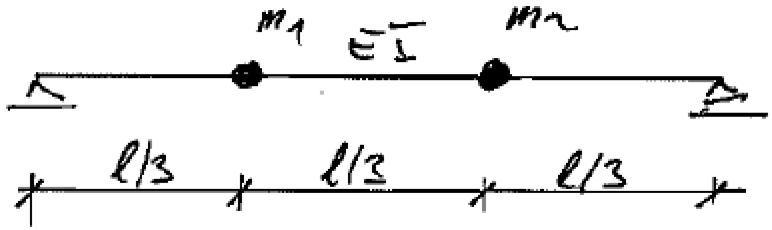
Dinamika konstrukcija i potresno inženjerstvo

Vježbe br.4 **30.03.12.**

Zadatak br.1

Odrediti kružne frekvencije i osnovne oblike (tonove, modove) proste grede prikazane na slici:



$m_1 = m_2 = M$

Ako se razmatraju samo vertikalni pomaci masa, onda je ovo sustav sa dva stupnja slobode gibanja. Radi se o slobodnim neprigušenim oscilacijama čija se diferencijalna jednadžba može napisati u obliku:

$$M\ddot{q} + Kq = 0 \qquad (1)$$

Gdje su:

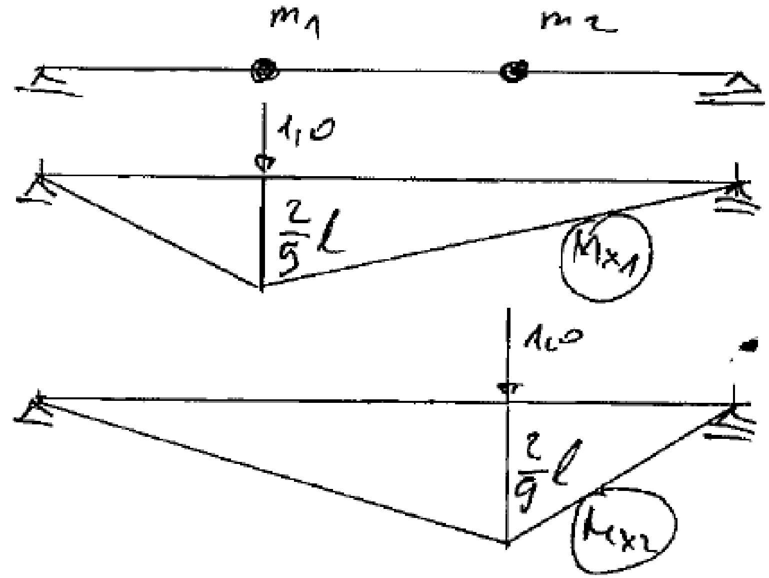
$$M = \begin{vmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{vmatrix} = M\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - matrica\ masa$$

$$K = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} - matrica\ krutosti$$

Inverzna ***matrica matrice*** krutosti zove se ***matrica fleksibilnosti***, a njena struktura se može zapisati u obliku:

$$D = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \end{bmatrix} = k^{-1}$$

U našem slučaju je najlakše
odrediti matricu fleksibilnosti D:



$$EI\delta_{11} = 3\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{l}{3}\cdot\frac{2}{9}l\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{9}\cdot l = \frac{4}{243}l^3$$

$$EI\delta_{12} = 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{l}{3}\cdot\frac{2}{9}\cdot l\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{9}\cdot l + \frac{1}{9}\cdot l\cdot\frac{l}{3}\cdot\frac{1}{6}l + \frac{1}{2}\cdot\frac{l}{3}\cdot\frac{1}{9}\cdot l\cdot\left(\frac{1}{9}l + \frac{1}{3}l\right) = \frac{7}{486}l^3$$

$$EI\delta_{22} = EI\delta_{11}$$

$$D = \frac{l^3}{243EI}\begin{bmatrix} 4,0 & 3,5 \\ 3,5 & 4,0 \end{bmatrix}$$

Budući da smo definirali matricu masa M i matricu fleksibilnosti D, u jednadžbi (1) ostaje nepoznat vektor pomaka q.

Rješenje sustava (1) se traži u obliku:

$$q = a\sin(\omega t + \emptyset) \qquad (2)$$

a-amplituda pomaka

$$\ddot{q} = -\omega^2 a \sin(\omega t + \emptyset) = -\omega^2 q \qquad (3)$$

Ako se matrična jednadžba (1) pomnoži sa lijeve strane sa matricom fleksibilnosti, te uzme u obzir jednadžba (3), dobiva se:

$$(-\omega^2 DM + I)q = 0 \qquad (4)\ ili$$

$$(D_M - \lambda I)a = 0 \qquad (5)$$

Gdje je $\lambda = 1/\omega^2$. Umnožak matrica D i M označili smo sa D_M i zove se dinamička matrica. Njena struktura se za sustave s diskretnim masama može prikazati u obliku:

$$D_M = \begin{bmatrix} \delta_{11}m_1 & \delta_{12}m_2 \\ \delta_{21}m_1 & \delta_{22}m_2 \end{bmatrix}$$ ili u našem zadatku:

$$D_M = \frac{Ml^3}{243EI}\begin{bmatrix} 4,0 & 3,5 \\ 3,5 & 4,0 \end{bmatrix} = k\begin{bmatrix} 4,0 & 3,5 \\ 3,5 & 4,0 \end{bmatrix}$$

Jednadžbom (5) smo dobili sustav algebarskih jednadžbi po vektoru a. Taj sustav je homogen, pa je uvjet za egzistenciju netrivijalnog rješenja da je determinanta sustava jednaka nuli:

$$|D_M - \lambda I| = 0 \qquad (6) \quad \text{ili}$$

$$\begin{vmatrix} 4{,}0 - \lambda/k & 3{,}5 \\ 3{,}5 & 4{,}0 - \lambda/k \end{vmatrix} = 0 \qquad (7)$$

Razvojem gornje determinante dobije se tzv.karakteristični polinom po nepoznanici λ:

$$4\lambda^2 - 32k\lambda + 15k^2 = 0 \qquad (8)$$

Čija su rješenja : $\lambda_1 = 7{,}5k$ i $\lambda_2 = 0{,}5k$

Sada su kružne frekvencije:

$$\omega_1^2 = \frac{1}{\lambda_1} = \frac{1}{7{,}5k} = \frac{243EI}{7{,}5Ml^3} = \frac{32{,}4EI}{Ml^3}$$

$$\omega_2^2 = \frac{1}{\lambda_2} = \frac{1}{0{,}5k} = \frac{243EI}{0{,}5Ml^3} = \frac{486EI}{Ml^3}$$

Ako se vratimo na jednadžbu (5) kako bi odredili vlastite oblike osciliranja, odnosno vektor a. Razvojem matrične jednadžbe (5) dobiva se:

$$\left(4-\frac{\lambda}{k}\right)a_1 + 3{,}5a_2 = 0$$

$$3{,}5a + \left(4-\frac{\lambda}{k}\right)a_2 = 0 \qquad (9)$$

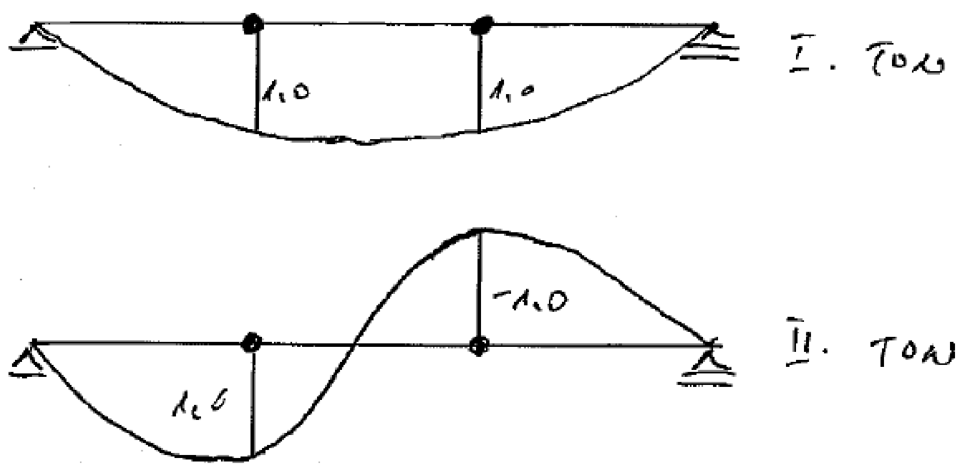
Iz prve od gornjih jednadžbi dobivamo:

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{-(4-\frac{\lambda}{k})}{3{,}5}$$ pa je za $\lambda=\lambda_1$ $(\omega=\omega_1)$

$$\frac{a_{2(1)}}{a_{1(1)}} = 1{,}0$$ te za $\lambda=\lambda_2$ $(\omega=\omega_2)$

$$\frac{a_{2(2)}}{a_{1(2)}} = -1{,}0$$

Na donjoj skici su shematski prikazani vlastiti oblici (tonovi, modovi).



Zadatak br.2

Za konstrukciju prikazanu na slici odrediti:

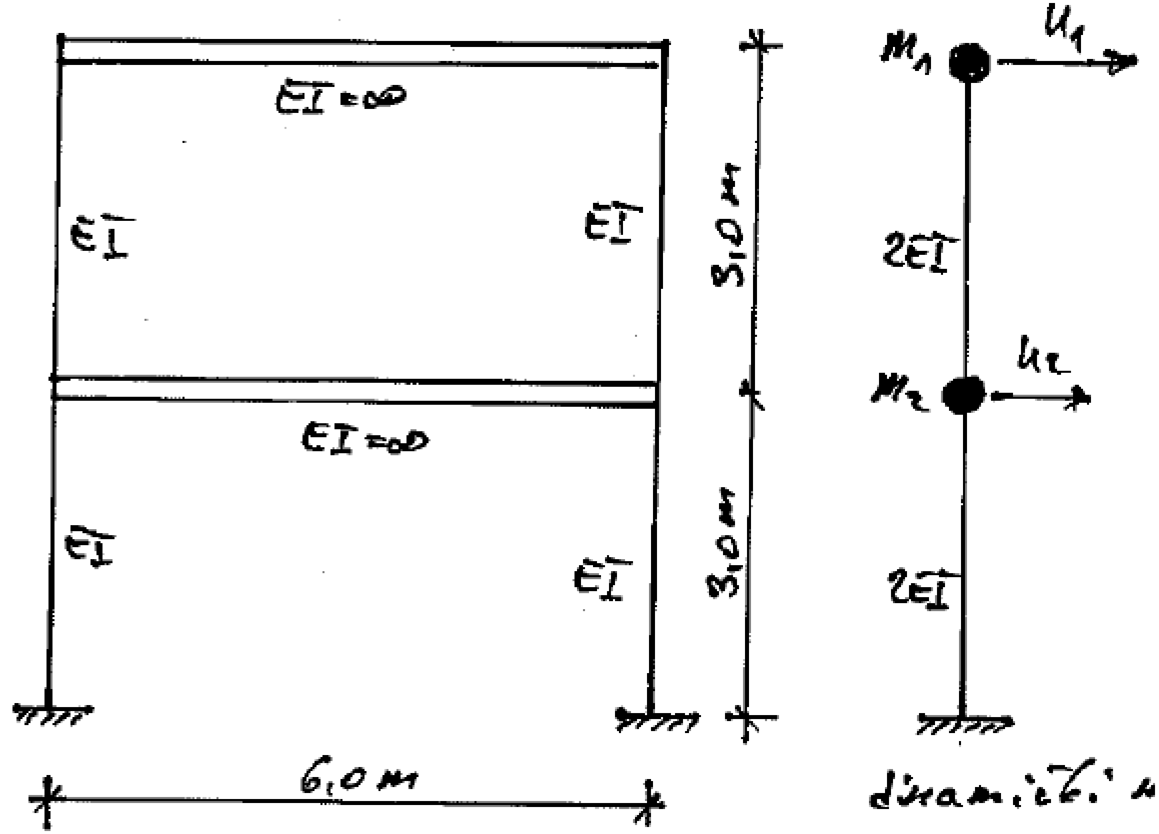
a) Prirodne frekvencije i odgovarajuće vlastite oblike

b) Jednadžbe gibanja s početnim uvjetima: u_{01}, u_{02}, te $\dot{u}_{01}$ i $\dot{u}_{02}$

$m_1 = m_2/2 = 50 kNs^2/m$

E=30 000 Mpa

$I = 0{,}675 \cdot 10^{-3} m^4$

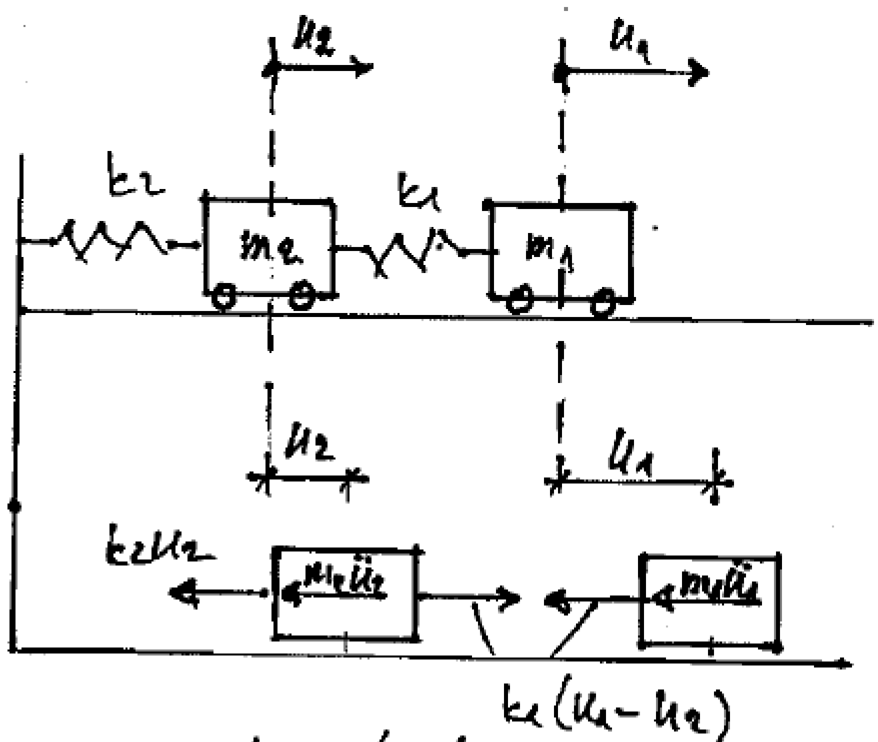


- Konstrukcija se razmatra kao apsolutno kruta
- Zgrada posmika – „Shear building”
- Savojna krutost jednaka zbroju krutosti
- Čvorovi nemaju rotacije – zadržava se pravi kut
- Mase koncentrirane u katovima
- Zanemaruje se uzdužna rotacija štapova
- Koeficijent krutosti između bilo koje dvije susjedne mase je sila nastala uslijed jediničnog relativnog pomaka dvije susjedne međukatne konstrukcije. U slučaju stupova čija su oba kraja upeta (spriječena rotacija krajeva stupa) ukupna krutost kata „j” je:

$$k_j = \sum \frac{12EI}{h^3}$$

Dok je za stup čiji je jedan kraj upet a drugi slobodno oslonjen ta krutost:

$$k_j = \sum \frac{3EI}{h^3}$$



matematički model

a) Na temelju navedenog stupovi imaju istu krutost:

$$k_1 = k_2 = 2\frac{12EI}{l^3} = \frac{24 \cdot 30000 \cdot 10^3 \cdot 0{,}675 \cdot 10^{-3}}{3^3} = 18000{,}0 kN/m$$

Diferencijalna jednadžba gibanja se dobija primjenom npr.D'alambertovog principa:

$$m_1\ddot{u}_1 + k_1(u_1 - u_2) = 0$$

$$m_2\ddot{u}_2 + k_2u_2 - k_1(u_1 - u_2) = 0 \qquad (1)$$

Ili

$$m_1\ddot{u}_1 + k_1u_1 - k_1u_2 = 0$$

$$m_2u_2 - k_1u_1 + (k_1 + k_2)u_2 = 0 \qquad (2)$$

Rješenje gornjih jednadžbi se može zapisati na pozanti način, za slobodne neprigušene oscilacije:

$$u_1 = a_1 \sin(\omega t - \emptyset) \qquad (3)$$

$$u_2 = a_2 \sin(\omega t - \emptyset) \qquad a_1, a_2 - amplitude \text{dok}$$

su ubrzanja:

$$u_1 = -a_1\omega^2 \sin(\omega t - \emptyset)$$

$$u_2 = -a_2\omega^2 \sin(\omega t - \emptyset) \qquad (4)$$

Vraćanjem jednadžbi (3) i (4) u (2) dobije se:

$$(k_1 - m_1\omega^2)a_1 - k_1 a_2 = 0$$
$$-k_1 a_1 + (k_1 + k_2 - m_2\omega^2)u_2 = 0 \qquad (5)$$

Ili matrično:

$$\begin{bmatrix} k_1 - m_1\omega^2 & -k_1 \\ -k_1 & k_1 + k_2 - m_2\omega^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \qquad (6)$$

Sustav statički spregnut !

Za postojanje netrivijalnog rješenja determinanta koeficijenata mora biti jednaka nuli→

$$\begin{vmatrix} k_1 - m_1\omega^2 & -k_1 \\ -k_1 & k_1 + k_2 - m_2\omega^2 \end{vmatrix} = 0 \qquad (7)$$

Razvojem ove diferencijalne jednadžbe dobije se kvadratna jednadžba (frekventna) po ω^2:

$$m_1 m_2 \omega^4 - (k_1 m_2 + k_1 m_1 + k_2 m_1)\omega^2 + k_1 k_2 = 0 \qquad (8)$$

Ili nakon uključivanja numeričkih vrijednosti:

$$\omega^4 - 900\omega^2 + 64800 = 0 \qquad (9)$$

Rješenja gornje jednadžbe su:

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{900 \pm 742,16}{2} \qquad \omega_1 < \omega_2 - uvijek!$$

$$\omega_1^2 = 78,92 \rightarrow \omega_1 = 8,88 s^{-1}$$

$$\omega_2^2 = 821,10 \rightarrow \omega_2 = 28,65 s^{-1}$$ kružne frekvencije

$$f_1 = \frac{\omega_1}{2\pi} = 1,414 Hz, f_2 = \frac{\omega_2}{2\pi} = 4,56 Hz$$ prirodne frekvencije

$$T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{1}{f_1} = 0,707 s;\ T_2 = \frac{2\pi}{\omega_2} = \frac{1}{f_2} = 0,219 s$$ periodi

Iz sustava (6) po nepoznatim amplitudama a_1 i a_2 izjdnačavanjem determinante sa nulom u jednadžbi (7) postoji samo jedna zavisna jednadžba a dvije nepoznanice.

Zbog toga nismo u mogućnosti odrediti apsolutne vrijednosti amplituda, nego samo njihove relativne odnose (za sada dovoljno).

Ako se uzme prva od jednadžbi (6) te u nju uključimo prvu frekvenciju ω_1, dobije se:

$$(k_1 - m_1\omega^2)a_{1(1)} - k_1 a_{2(1)} = 0 \quad \text{odnosno}$$

$$a_{1(1)} - 1{,}28 a_{2(1)} = 0 \qquad (10)$$

Odnos amplituda je:

$$\frac{a_{1(1)}}{a_{2(1)}} = 1{,}28$$

Ova relativna vrijednost se zove modalni oblik ili normalni oblik, koji odgovara prvoj frekvenciji. Uobičajeno je da se u vlastitim oblicima (tonovi, modovi) jednoj od amplituda pridruži jedinična vrijednost, pa je:

$$a_{1(1)} = 1{,}28; \qquad a_{2(1)} = 1{,}0$$

Na isti način se postupa i sa drugom kružnom frekvencijom (u drugu od jednadžbi (6) se uključi druga frekvencija ω_2, pa je :

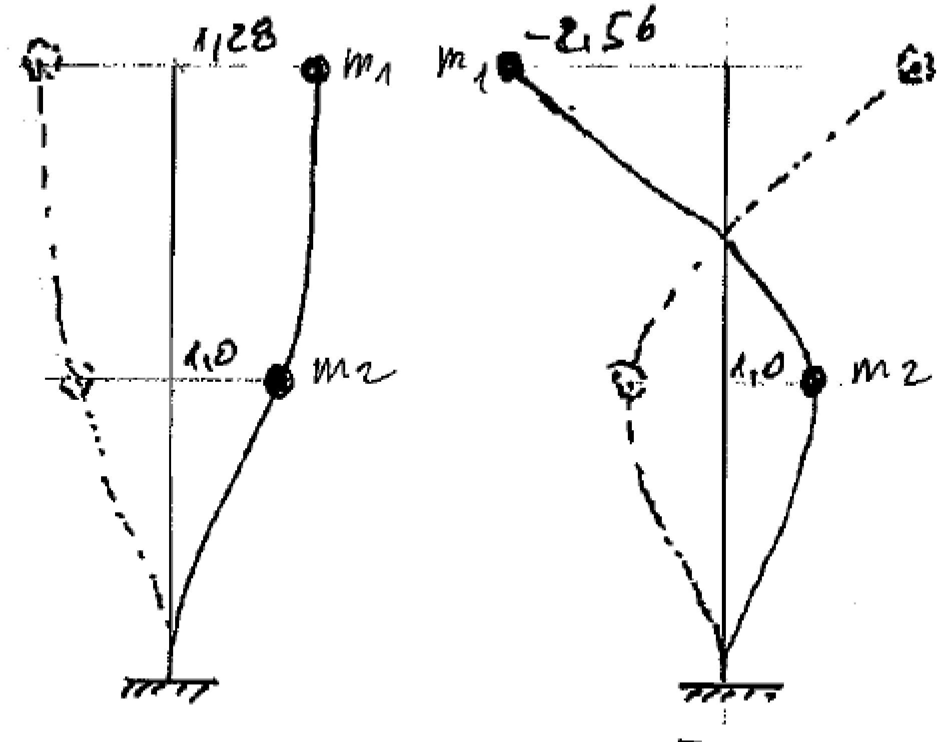
$$-k_1 a_{1(2)} + (k_1 + k_2 - m_2\omega_2^2) a_{2(2)} = 0, \quad \text{odnosno}$$

$$-a_{1(2)} - 2{,}56 a_{2(2)} = 0 \qquad (11)$$

Pa je odnos amplituda:

$$\frac{a_{1(2)}}{a_{2(2)}} = -2{,}56 \quad ; \quad a_{2(2)} = 1{,}0 \quad ; \quad a_{1(2)} = -2{,}56$$

Vlastiti oblici su prikazani na donjoj slici (2 tona):



I. TON II. TON