Dinamika konstrukcija i potresno inženjerstvo

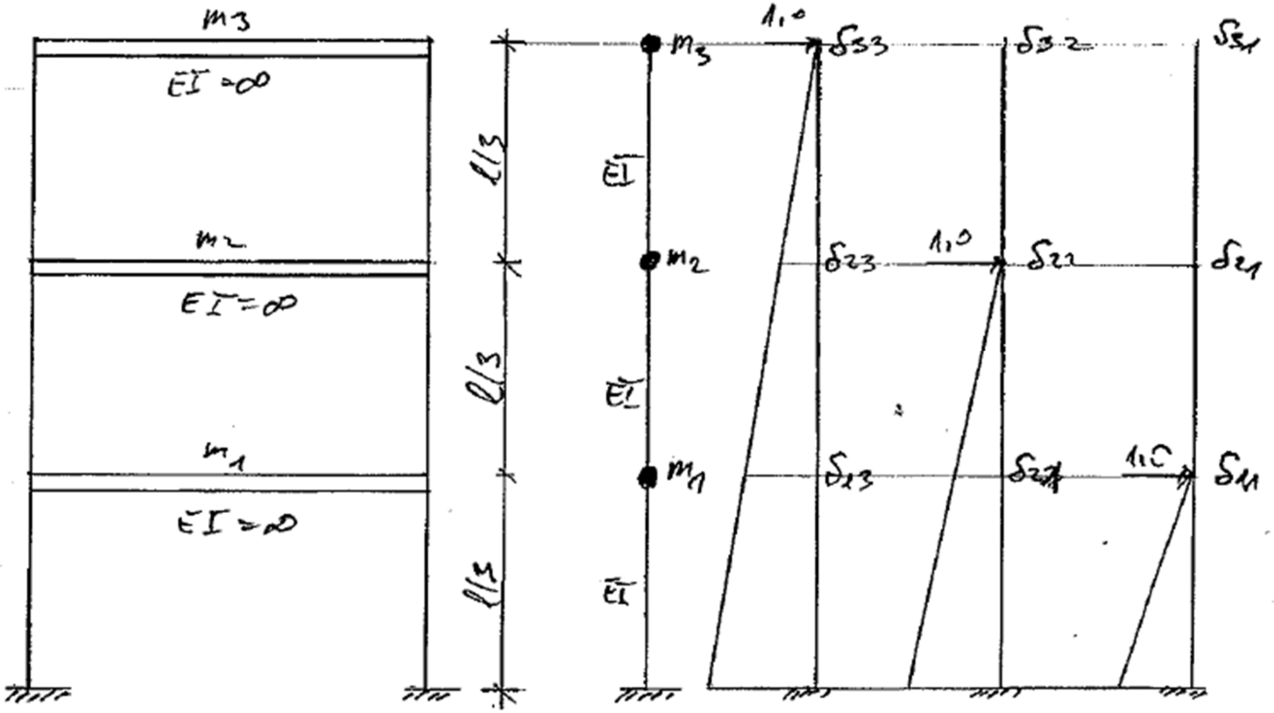
Vježbe br.7 **07.05.12.**

1.kolokvij – 17.05.2012. – četvrtak

(termin 16.15. sati)

Zadatak br.1

Odrediti vlastite frekvencije i vlastite oblike konstrukcije, uzimajući grede kao apsolutno krute, pri čemu stupovi imaju svoju krutost, ali zanemarivu masu.



$m_1=3$

$m_2=2$

$m_3=1$

$K=EI/l^3=const$

$= 800(10kN/m)$

Na prethodnoj slici je bio prikazan dinamički model i dispozicija za određivanje Maxwellovih utjecajnih koeficijenata.

Matrica fleksibilnosti:

$$[D] = \frac{1}{81K}\begin{bmatrix} 1 & 2{,}5 & 4 \\ 2{,}5 & 8 & 14 \\ 4 & 14 & 27 \end{bmatrix}$$

Matrica masa:

$$[M] = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Umnožak matrica [D] i [M] zovemo **dinamička matrica** $[D_M]$:

$$[D_M] = [D][M] = \frac{1}{81K}\begin{bmatrix} 3 & 5 & 4 \\ 7{,}5 & 16 & 14 \\ 12 & 28 & 27 \end{bmatrix}$$

U vektorskoj iteraciji se koristi postupak s matricom fleksibilnosti :

$[D_M]\{\emptyset\} = \frac{1}{\omega^2}\{\emptyset\}$ ili razvijeno u matričnom obliku:

$$\begin{bmatrix} 3 & 5 & 4 \\ 7,5 & 16 & 14 \\ 12 & 28 & 27 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \emptyset_1 \\ \emptyset_2 \\ \emptyset_3 \end{Bmatrix} = \lambda \begin{Bmatrix} \emptyset_1 \\ \emptyset_2 \\ \emptyset_3 \end{Bmatrix} \qquad \lambda = \frac{81k}{\omega^2}$$

<u>Prvi (osnovni) oblik (ton, mod)</u>

Usvaja se oblik prvog tona s početnim vrijednostima: Φ_1=1, Φ_2=4, Φ_3=8. U narednim koracima i tablici prikazan je iterativni postupak gdje je amplituda Φ_1 uvijek reducirana na jedinicu.

1.Korak

$$\begin{bmatrix} 3 & 5 & 4 \\ 7,5 & 16 & 14 \\ 12 & 28 & 27 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 4 \\ 8 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 55 \\ 183,5 \\ 340 \end{Bmatrix} = 55 \begin{Bmatrix} 1,0 \\ 3,3384 \\ 6,1818 \end{Bmatrix}$$

2.Korak

$$\begin{bmatrix} 3 & 5 & 4 \\ 7,5 & 16 & 14 \\ 12 & 28 & 27 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1,0 \\ 3,3384 \\ 6,1818 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 44,4092 \\ 147,4276 \\ 272,3278 \end{Bmatrix} = 44,4092 \begin{Bmatrix} 1,0 \\ 3,3498 \\ 6,1332 \end{Bmatrix}$$

Rezultati sljedećih iteracija dani su u sljedećoj tablici:

ITERACIJA	$\lambda_{(1)}$	Φ_{11}	Φ_{21}	Φ_{31}
3	44,1278	1,0	3,3192	6,1305
4	44,1180	1,0	3,3192	6,1304
5	44,1171	1,0	3,3192	6,1304

Prema tome:

$$\lambda_1 = \frac{81k}{\omega_1^2} = \frac{81 \cdot 800}{\omega_1^2} = 44{,}171 \rightarrow \omega_1^2 = 1468{,}8049$$

$$\omega_1 = 38{,}33\ \frac{rad}{s}\ \ [s^{-1}]$$

A prvi ton je (normaliziran):

$$\{\Phi_1\} = \begin{Bmatrix} 1{,}0 \\ 3{,}3191 \\ 6{,}1304 \end{Bmatrix}$$

Drugi vlastiti oblik

Na probni stupac $\{\Phi\}$ primjenjujemo sljedeći uvjet ortogonalnosti:

$$\{\Phi_1\}^T[M]\{\Phi\} = \{1{,}0 \quad 3{,}3191 \quad 6{,}1304\}\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \emptyset_1 \\ \emptyset_2 \\ \emptyset_3 \end{Bmatrix} = 0$$

Ili u razvijenom obliku:

$$3\Phi_1 + 6{,}6382\Phi_2 + 6{,}1304\Phi_3 = 0$$

Sada vežemo probnu vrijednost Φ_1 , dok su Φ_2 i Φ_3 proizvoljni:

$$\Phi_1 = -2{,}2127\Phi_2 - 2{,}0435\Phi_3;\ \Phi_2 = \Phi_2;\ \Phi_3=\Phi_3$$

U matričnom obliku:

$$\begin{bmatrix} 0 & -2{,}2127 & -2{,}0435 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \emptyset_1 \\ \emptyset_2 \\ \emptyset_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \emptyset_1 \\ \emptyset_2 \\ \emptyset_3 \end{Bmatrix}$$

Gornja kvadratna matrica se zove matrica čišćenja ili eliminacije [S], koja nakon množenja s dinamičkom matricom $[D_M]$ da je matricom $[D]_1$, koja se zatim koristi u iterativnom postupku za drugi vlastiti oblik.

$$[D]_1 = \frac{1}{81k}\begin{bmatrix} 3 & 5 & 4 \\ 7{,}5 & 16 & 14 \\ 12 & 28 & 27 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -2{,}2127 & -2{,}0435 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{81k}\begin{bmatrix} 0 & -1{,}6381 & -2{,}1305 \\ 0 & -0{,}5953 & -1{,}3263 \\ 0 & 1{,}4476 & 2{,}4780 \end{bmatrix}$$

Grubo procijenjeni oblik drugog tona:

$$\Phi_1 = 1{,}0; \quad \Phi_2 = 1{,}0; \quad \Phi_3 = -1{,}0$$

Iterativni postupak je sada isti kao i kod prvog tona, s tim što sada koristimo vezanu dinamičku matricu:

$$[D]_1 = [D_M][S]$$

1.Korak iterativni

$$\begin{bmatrix} 0 & -1{,}6381 & -2{,}1305 \\ 0 & -0{,}5935 & -1{,}3263 \\ 0 & 1{,}4476 & 2{,}4780 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 1{,}0 \\ 1{,}0 \\ -1{,}0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0{,}4924 \\ 0{,}7310 \\ -1{,}0304 \end{Bmatrix} = 0{,}4924\begin{Bmatrix} 1{,}0 \\ 1{,}4846 \\ -2{,}0926 \end{Bmatrix}$$

2.Korak

$$\begin{bmatrix} 0 & -1{,}6381 & -2{,}1305 \\ 0 & -0{,}5935 & -1{,}3263 \\ 0 & 1{,}4476 & 2{,}4780 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 1{,}0 \\ 1{,}4846 \\ -2{,}0926 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2{,}0264 \\ 1{,}8857 \\ -3{,}0364 \end{Bmatrix} = 2{,}0264\begin{Bmatrix} 1{,}0 \\ 0{,}9306 \\ -1{,}4984 \end{Bmatrix}$$

Slijedeće iteracije su date u donjoj tablici:

ITERACIJA	$\lambda_{(1)}$	Φ_{11}	Φ_{21}	Φ_{31}
3	1,6679	1,0	0,8573	-1,4185
4	1,6195	1,0	0,8484	-1,4067
5	1,6072	1,0	0,8466	-1,4072
6	1,6059	1,0	0,8463	-1,4044
7	1,6058	1,0	0,8462	-1,4043
8	1,6057	1,0	0,8462	-1,4043

Prema tome su:

$$\lambda_2 = \frac{81k}{\omega_2^2} = 1,60571 \rightarrow \omega_2 = 200,9\ \frac{rad}{s}\ \ [s^{-1}]$$

A drugi ton je:

$$\{\Phi_2\} = \begin{Bmatrix} 1,0 \\ 0,8462 \\ -1,4043 \end{Bmatrix}$$

Treći vlastiti oblik (ton)

Ovaj ton se može dobiti izravnom primjenom jednadžbe:

$\{\Phi_1\}^T [M]\{\Phi\} = 0\,; \{\Phi_2\}\,[M]\{\Phi\} = 0$ ili razvijeno

$\Phi_1 + 2{,}2127\Phi_2 + 2{,}0435\Phi_3 = 0 \qquad \rightarrow \Phi_1 = 1{,}301\Phi_2$

$\Phi_1 + 0{,}5511\Phi_2 - 0{,}4681\Phi_3 = 0 \qquad \rightarrow \Phi_2 = -1{,}5116\Phi_3$

$\rightarrow \Phi_3 = \Phi_3$

Matrica čišćenja ili eliminacije je:

$$[S]_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1{,}3010 \\ 0 & 0 & -1{,}5116 \\ 0 & 0 & 1{,}00 \end{bmatrix}$$

Nova dinamička matrica je :

$$[D]_2 = [D_M][S]_2 = \frac{1}{81k}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0{,}345 \\ 0 & 0 & -0{,}4281 \\ 0 & 0 & 0{,}2872 \end{bmatrix}$$

Zbog nultih članova u prva dva stupca gornje matrice, iteracija će biti trivijalna.

Započinje se s probnim stupcem gdje je definiran samo treći element i usvojen kao jedinica:

1.Korak

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0{,}345 \\ 0 & 0 & -0{,}4281 \\ 0 & 0 & 0{,}2872 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} — \\ — \\ 1{,}0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0{,}3450 \\ -0{,}4281 \\ 0{,}2872 \end{Bmatrix} = 0{,}2872 \begin{Bmatrix} 1{,}2013 \\ -1{,}4906 \\ 1{,}00 \end{Bmatrix}$$

2.Korak

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0{,}345 \\ 0 & 0 & -0{,}4281 \\ 0 & 0 & 0{,}2872 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1{,}2013 \\ -1{,}4906 \\ 1{,}0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0{,}3450 \\ -0{,}4281 \\ 0{,}2872 \end{Bmatrix} = 0{,}2872 \begin{Bmatrix} 1{,}2013 \\ -1{,}4906 \\ 1{,}00 \end{Bmatrix}$$

Normalizacija je dakle, samo u odnosu na treći element, jer jedino on ima utjecaja na račun.

$$\lambda_3 = \frac{81k}{\omega_3^2} = 0{,}2872 \rightarrow \omega_3 = 472{,}9\ \frac{rad}{s}\ \ [s^{-1}]$$

Normalizacijom u odnosu na prvi član se dobije:

$$\{\Phi_3\} = \begin{Bmatrix} 1{,}0 \\ -1{,}2409 \\ 0{,}8325 \end{Bmatrix}$$

Na donjoj slici su prikazani vlastiti oblici: