Dinamika konstrukcija i potresno inženjerstvo

Vježbe br.5 **12.04.12.**

Nastavak zadatka iz prošle vježbe

b) Jednadžbe gibanja

Ukupno gibanje sustava, tj. ukupno rješenje jednadžbi gibanja ($M\ddot{u} + ku = 0$) se dobije superpozicijom modalnih harmonijskih oscilacija, koje se mogu zapisati u obliku:

$$u_1(t) = c_1' a_{1(1)} \sin(\omega_1 t - \emptyset_1) + c_2' a_{1(1)} \sin(\omega_2 t - \emptyset_2)$$

$$u_2(t) = c_1' a_{2(1)} \sin(\omega_1 t - \emptyset_1) + c_2' a_{2(2)} \sin(\omega_2 t - \emptyset_2) \qquad (12)$$

$c_1', c_2', \emptyset_1, \emptyset_2$ - konstante integracije koje treba odrediti iz 4 početna uvjeta:

$$u_1(0) = u_{01} \quad ; \quad \dot{u}_1(0) = \dot{u}_{01}$$

$$u_2(0) = u_{02} \quad ; \quad \dot{u}_2(0) = \dot{u}_{02} \qquad (13)$$

$$u_1(t) = c_1 a_{1(1)} \sin\omega_1 t + c_2 a_{1(1)} cos\omega_1 t + c_3 a_{1(2)} sin\omega_2 t + c_4 a_{1(2)} cos\omega_2 t$$

$$u_2(t) = c_1 a_{2(1)} \sin\omega_1 t + c_2 a_{2(1)} cos\omega_1 t + c_3 a_{2(2)} sin\omega_2 t + c_4 a_{2(2)} cos\omega_2 t \qquad (14)$$

Iz prva dva početna uvjeta dobiju se dvije jednadžbe:

$$u_{01} = c_2 a_{1(1)} + c_4 a_{1(2)}$$
$$u_{02} = c_2 a_{2(1)} + c_4 a_{2(2)} \qquad (15)$$

Kako su vlastiti oblici neovisni, gornje jednadžbe se mogu uvijek riješiti po nepoznanicama c_2 i c_4.

Na isti način se u jednadžbe (14) uvedu početne brzine, dobiva se:

$$\dot{u}_{01} = \omega_1 c_1 a_{1(1)} + \omega_2 c_3 a_{1(2)}$$
$$\dot{u}_{02} = \omega_1 c_1 a_{2(1)} + \omega_2 c_3 a_{2(2)} \qquad (16)$$

Rješenje ova dva sustava jednadžbi (15) i (16) omogućava da se gibanje sustava izrazi preko dvije modalne oscilacije (vlastita oblika). Svaki od njih ima svoju vlastitu frekvenciju i potpuno su neovisni.

Ortogonalnost vlastitih oblika

Ako se sustav jednadžbi : $[M]\{\ddot{u}\} + [k]\{u\} = 0$ (a)

Zapiše u obliku: $[k]\{a\} = \omega^2[M]\{a\}$ (b) $([K] = [M]\omega^2$

Onda je sustav iz našeg zadatka:

$$(k_1 - m_1\omega^2)a_1 - k_1 a_2 = 0$$
$$-k_1 a_1 + (k_1 + k_2 - m_2\,\omega^2)a_2 = 0$$

Ako se zapiše u obliku (b), dobije se:

$$k_1 a_1 - k_1 a_2 = m_1\omega^2 a_1$$
$$-k_1 a_1 + (k_1 + k_2)a_2 = m_2\omega^2 a_2$$

Primjenom Bettijevog poučka o uzajamnosti radova, vrijedi:

$\sum_{i=1}^{n} m_i \cdot a_{i(r)} \cdot a_{i(l)} = 0, r \neq l$ što predstavlja uvjet ortogonalnosti,

Pa se za zadani sustav može pisati:

$\omega_1^2 m_1 a_{11} a_{12} + \omega_1^2 m_2 a_{21} a_{22} = \omega_2^2 m_1 a_{12} a_{11} + \omega_2^2 m_2 a_{22} a_{21}$ ili

$(\omega_1^2 - \omega_2^2)(m_1 a_{11} a_{12} + m_2 a_{21} a_{22}) = 0$ gdje je $(\omega_1 \neq \omega_2 \neq 0)$

$m_1 a_{11} a_{12} + m_2 a_{21} a_{22} = 0$ - ortogonalnost

Zadatak br.2

Za zgradu posmika na slici odrediti problem vlastitih vrijednosti horizontalnih oscilacija, ako zgrada ima sljedeće karakteristike:

$EI_1 = 3 \cdot 10^7 \ kNm^2$

$EI_2 = 1{,}5 \cdot 10^7 \ kNm^2$

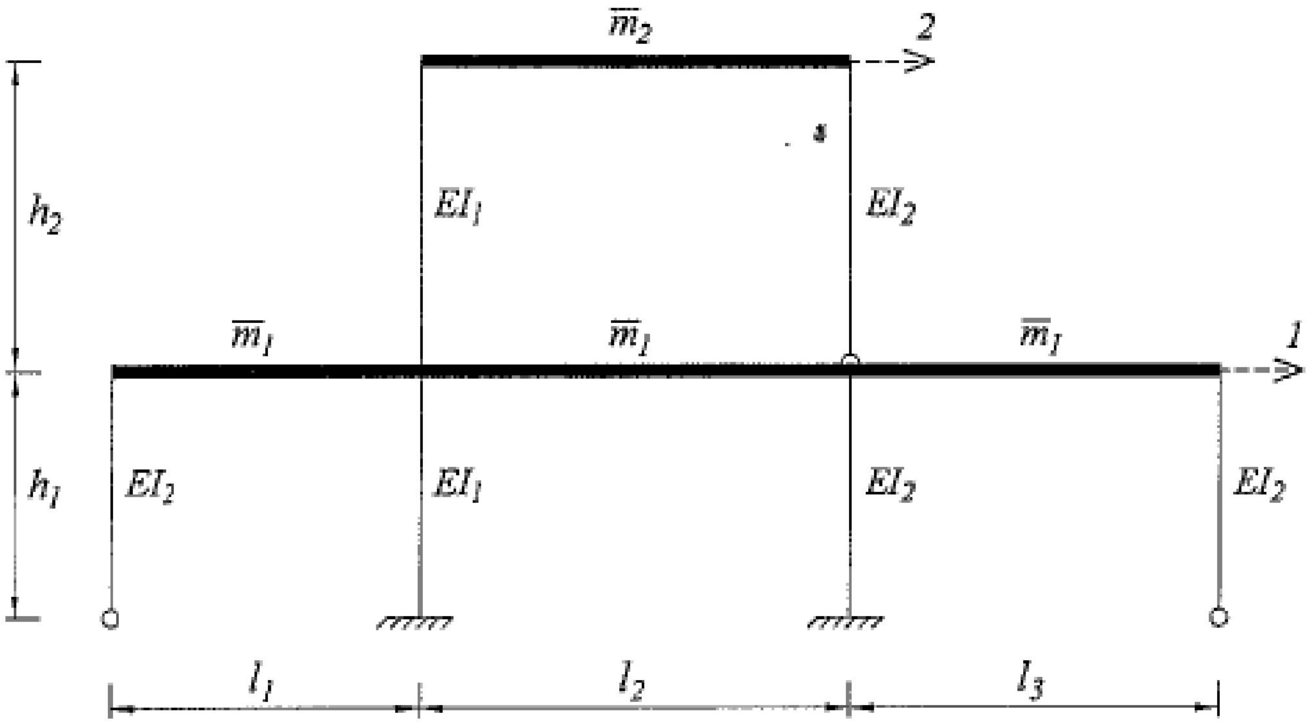
$l_1 = 5 \ m$

$l_2 = 7 \ m$

$l_3 = 6 \ m$

$h_1 = 4 \ m$

$h_2 = 5 \ m$



$\overline{m}_1 = 70 \ t/m \qquad m_1 = \overline{m}_1 \cdot (l_1 + l_2 + l_3) = 70 \cdot (5 + 7 + 6) = 1260 \ t$

$\overline{m}_2 = 50 \ t/m \qquad m_2 = \overline{m}_2 \cdot l_2 = 50 \cdot 7 = 350 \ t$

Jednadžba gibanja sustava :

$$[k] \cdot \{q\} = \omega^2 \cdot [m] \cdot \{q\}$$

$$[k] \cdot \{q\} - \omega^2 \cdot [m] \cdot \{q\} = \{0\}$$

$$([k] \cdot - \omega^2 \cdot [m]) \cdot \{q\} = \{0\}$$

$$[k] = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \qquad [m] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}$$

Krutosti se mogu izračunati prema izrazima:

a) Slučaj stupa čija su oba kraja upeta (spriječena rotacija krajeva stupa), pa je ukupna krutost kata „j” dana izrazom:

$$k_j = \sum \frac{12EI}{h^3}$$

b) Slučaj stupa kod kojeg je jedan kraj upet, a drugi slobodan ležaj, ukupna krutost kata „j” ima vrijednost:

$$k_j = \sum \frac{3EI}{h^3}$$

Pa se izračuna: $k_{11} = \frac{3EI_2}{h_1^3} + \frac{12EI_1}{h_1^3} + \frac{12EI_2}{h_1^3} + \frac{3EI_2}{h_1^3} + \frac{12EI_1}{h_2^3} + \frac{3EI_2}{h_2^3}$

$$= \frac{3 \cdot 1{,}5 \cdot 10^7}{4^3} + \frac{12 \cdot 3 \cdot 10^7}{4^3} + \frac{12 \cdot 1{,}5 \cdot 10^7}{4^3} + \frac{3 \cdot 1{,}5 \cdot 10^7}{4^3} + \frac{12 \cdot 3 \cdot 10^7}{5^3} + \frac{3 \cdot 1{,}5 \cdot 10^7}{5^3}$$

$$= 13{,}08 \cdot 10^6 \ kN/m$$

$$k_{21} = -\frac{12EI_1}{h_2^3} - \frac{3EI_2}{h_2^3}$$

$$k_{22} = \frac{12EI_1}{h_2^3} + \frac{3EI_2}{h_2^3}$$

$$k_{21} = -\frac{12 \cdot 3 \cdot 10^7}{5^3} - \frac{3 \cdot 1{,}5 \cdot 10^7}{5^3}$$

$$k_{22} = \frac{12 \cdot 3 \cdot 10^7}{5^3} + \frac{3 \cdot 1{,}5 \cdot 10^7}{5^3}$$

$$k_{21} = -3{,}24 \cdot 10^6 \ \ kN/m$$

$$k_{22} = 3{,}24 \cdot 10^6 \ \ kN/m$$

$$k_{12} = k_{21} = -3{,}24 \cdot 10^6 \ \ kN/m$$

$$[k] = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13{,}08 \cdot 10^6 & -3{,}24 \cdot 10^6 \\ -3{,}24 \cdot 10^6 & 3{,}24 \cdot 10^6 \end{bmatrix}$$

$$[m] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1260 & 0 \\ 0 & 350 \end{bmatrix}$$

$$\left([k]\cdot-\omega^2\cdot[m]\right)\cdot\{q\}=\{0\}$$

$$\left(\begin{bmatrix}13{,}08\cdot10^6 & -3{,}24\cdot10^6\\ -3{,}24\cdot10^6 & 3{,}24\cdot10^6\end{bmatrix}-\omega^2\begin{bmatrix}1260 & 0\\ 0 & 350\end{bmatrix}\right)\cdot\begin{Bmatrix}x_1\\ x_2\end{Bmatrix}=\{0\}$$

$$\left|\left([k]\cdot-\omega^2\cdot[m]\right)\right|=0$$

$$\begin{vmatrix}13{,}08\cdot10^6-1260\cdot\omega^2 & -3{,}24\cdot10^6\\ -3{,}24\cdot10^6 & 3{,}24\cdot10^6-350\cdot\omega^2\end{vmatrix}=0$$

$$\left(13{,}08\cdot10^6-1260\cdot\omega^2\right)\cdot\left(3{,}24\cdot10^6-350\cdot\omega^2\right)-\left(-3{,}24\cdot10^6\right)\cdot\left(-3{,}24\cdot10^6\right)$$

$$\omega_{(1)}^2 = 4908\ s^{-2} \qquad \rightarrow \qquad \omega_{(1)} = 70{,}06\ s^{-1}$$

$$\omega_{(2)}^2 = 14730\ s^{-2} \qquad \rightarrow \qquad \omega_{(2)} = 121{,}37\ s^{-1}$$

$$x_1 = a_1 \cdot \cos(\omega t - \rho)$$
$$x_2 = a_2 \cdot \cos(\omega t - \rho)$$

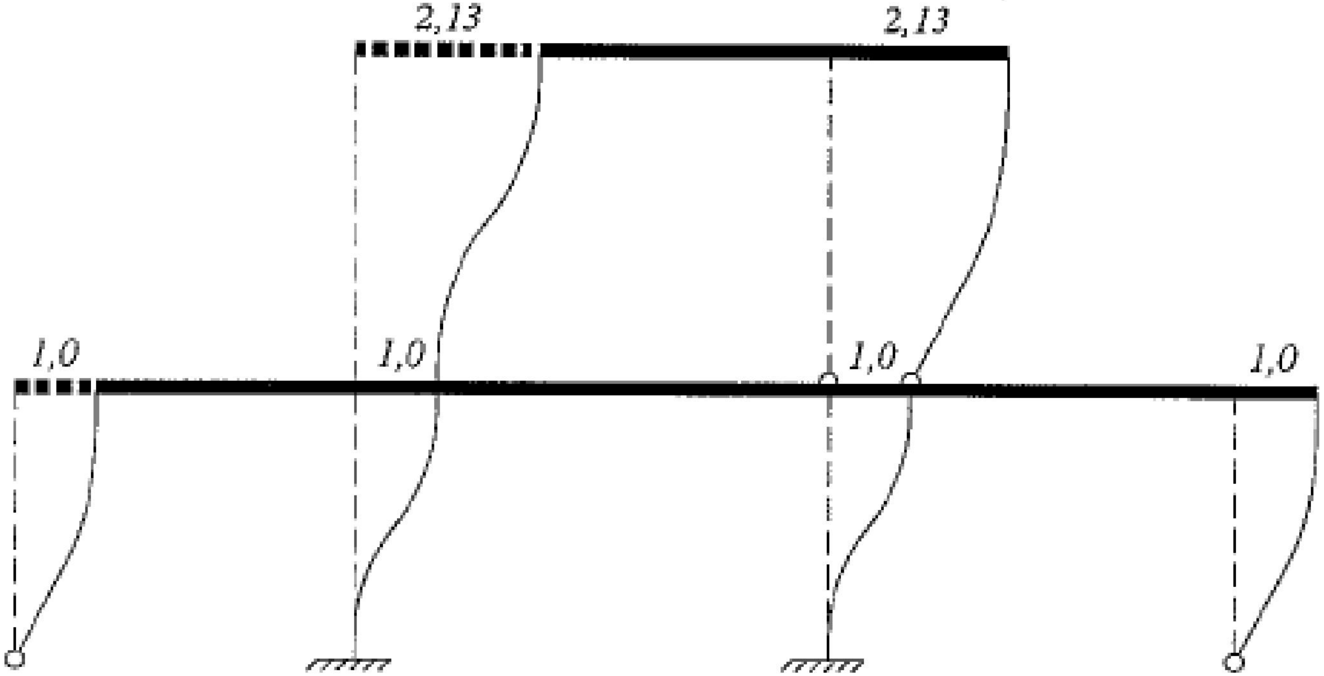
<u>Za prvi ton:</u>

$$\begin{bmatrix} k_{11} - m_1 \cdot \omega_{(1)}^2 & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} - m_2 \cdot \omega_{(1)}^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} a_{1(1)} \\ a_{2(1)} \end{Bmatrix} = \{0\}$$

$$\begin{bmatrix} 13{,}08 \cdot 10^6 - 1260 \cdot 4908 & -3{,}24 \cdot 10^6 \\ -3{,}24 \cdot 10^6 & 3{,}24 \cdot 10^6 - 350 \cdot 4908 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} a_{1(1)} \\ a_{2(1)} \end{Bmatrix} = \{0\}$$

$a_{1(1)} = 1{,}0 \ m$

$a_{2(1)} = 2{,}13 \ m$

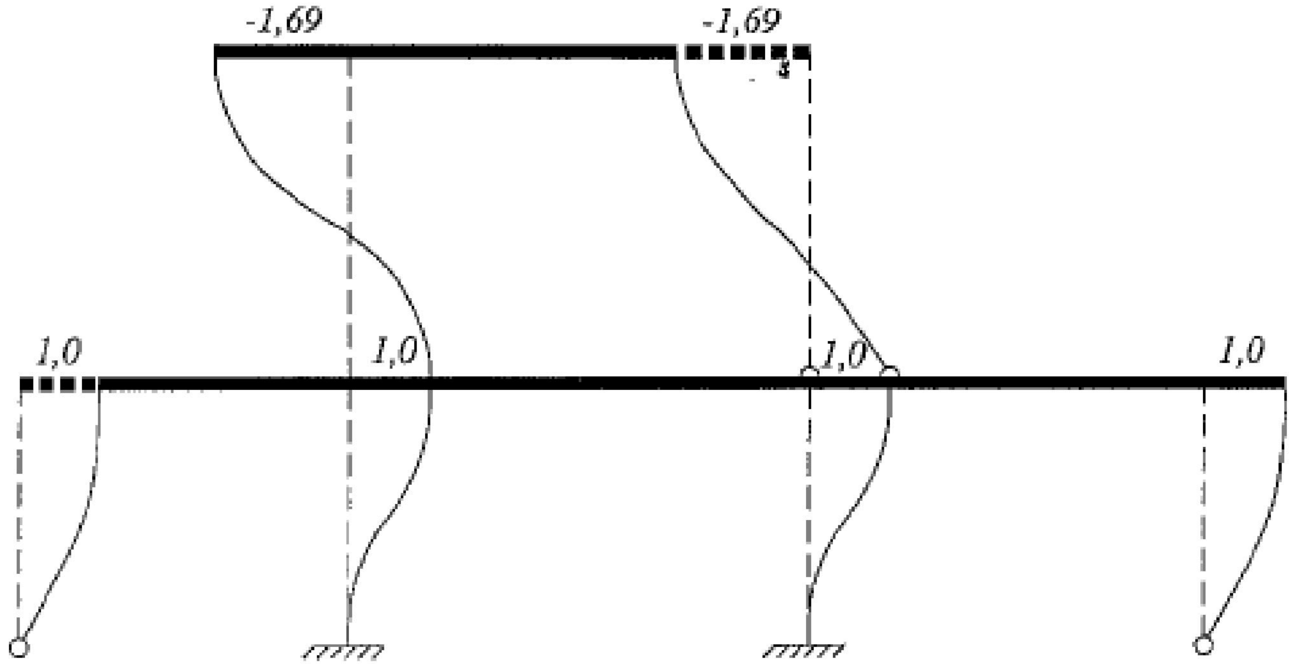


Prvi vlastiti oblik (za $\omega_{(1)} = 70{,}06 \ s^{-1}$)

Za drugi ton:

$$\begin{bmatrix} k_{11}-m_1\cdot\omega_{(2)}^2 & k_{12} \\ k_{21} & k_{22}-m_2\cdot\omega_{(2)}^2 \end{bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix} a_{1(2)} \\ a_{2(2)} \end{Bmatrix}=\{0\}$$

$$\begin{bmatrix} 13{,}08\cdot10^6-1260\cdot14730 & -3{,}24\cdot10^6 \\ -3{,}24\cdot10^6 & 3{,}24\cdot10^6-350\cdot14730 \end{bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix} a_{1(2)} \\ a_{2(2)} \end{Bmatrix}=\{0\}$$



Sl. 7-7. Drugi vlastiti oblik (za $\omega_{(2)}=121{,}37\ s^{-1}$)