# Dinamika konstrukcija i potresno inženjerstvo

**Vježbe br.3** **23.03.12.**

## ***Zadatak br.1***

(PRISILNE PRIGUŠENE OSCILACIJE)

Stroj mase m pričvršćen je na nosaču krutosti EI i zanemarive mase, te producira uzbudnu silu $F=F_0 \sin \Omega t$. Zbog prigušivanja ugrađen je viskozni prigušivač s koeficijentom prigušenja c.

Odrediti:

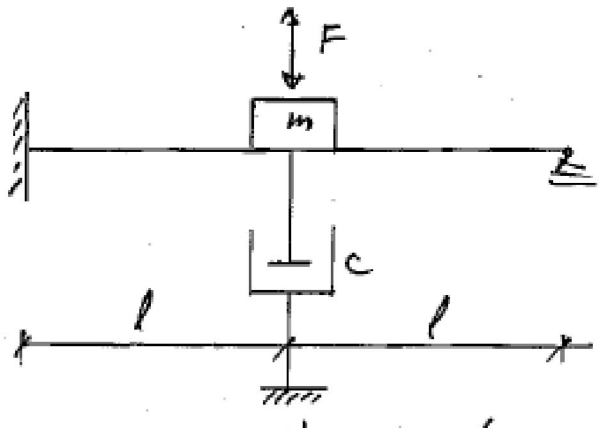
a) Krivulju koeficijenta dinamičnosti $A_d (\beta)$ i kuta faznog pomaka $\Phi(\beta)$ za slučaj bez prigušenja i sa prigušenjem.

b) Amplitudu oscilacija i kut faznog pomaka za slučaj najvećeg koeficijenta dinamičnosti kao i za slučaj rezonancije ($\beta$ =1)

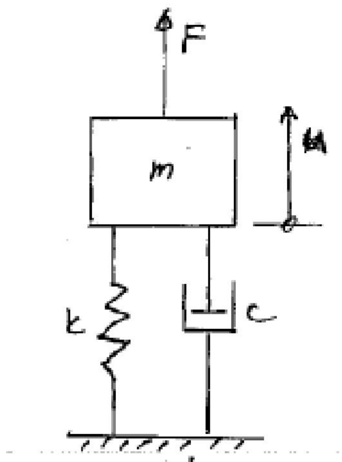
c) Frekvenciju $\Omega$ sile pobude za slučaj osciliranja pod točkom b).

Zadano je: G=5kN, l=4m, EI=118 kNm2, $F_0$=0,5kN, c=1,43 kNs/m.

Zadani sustav: Ekvivalentni sustav:




a) Slika 1.




b)

Zadani sustav se može zamijeniti ekvivalentnim sustavom s jednim stupnjem slobode, kao na slici b). U tom slučaju koeficijent dinamičnosti i fazni kut su:

a) S prigušenjem ($\xi \neq 0$)

$$A_d = \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}} \quad ; \quad \phi = \mathrm{arctg}\,\frac{2\xi\beta}{1-\beta^2}$$

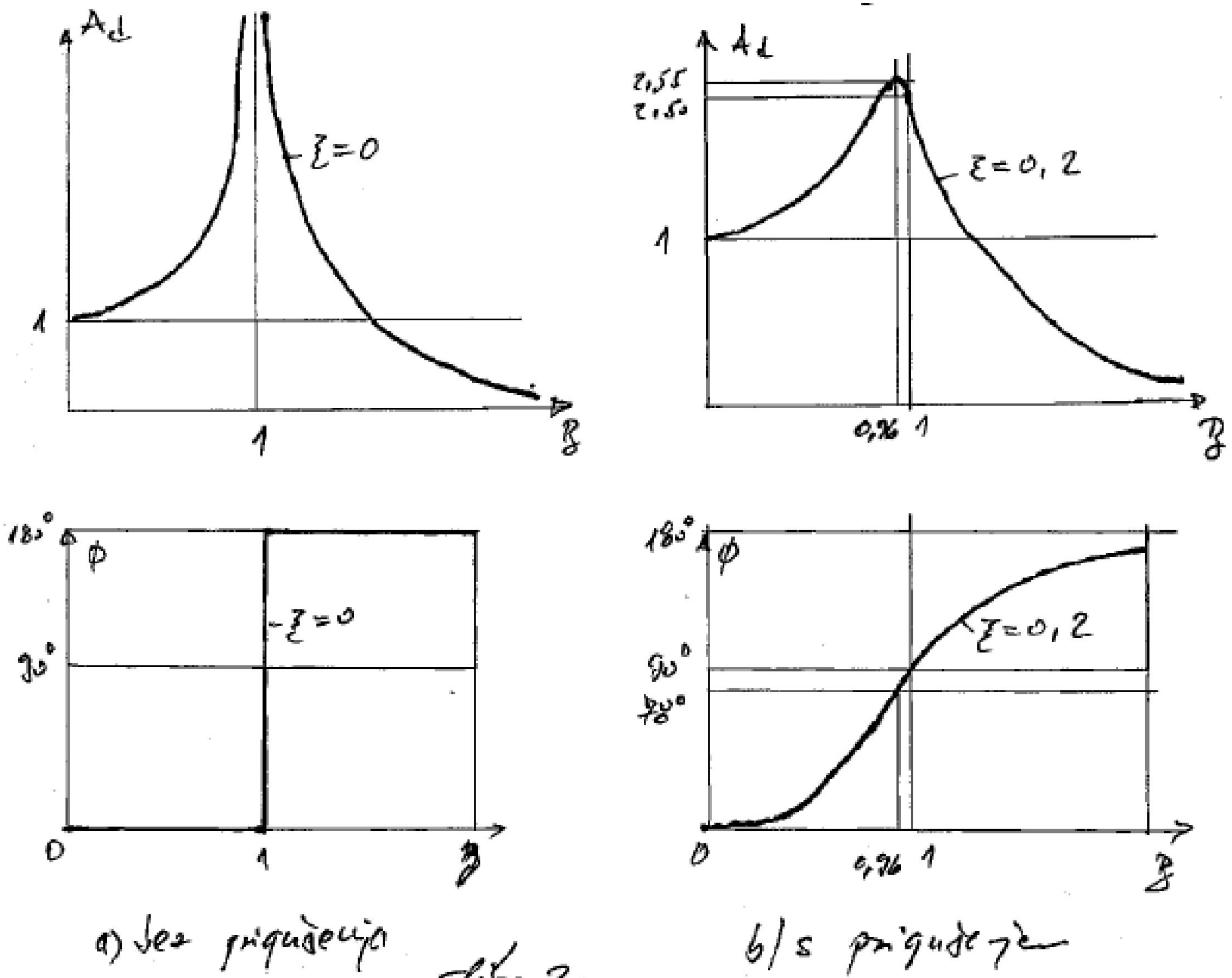
b) Bez prigušenja ($\xi = 0$)

$$A_d = \frac{1}{1-\beta^2} \quad ;$$

$\phi = 0°$ (za $\beta < 1$)

$\phi =$ neodređeno (za $\beta = 1$)

$\phi = 180°$ (za $\beta > 1$)

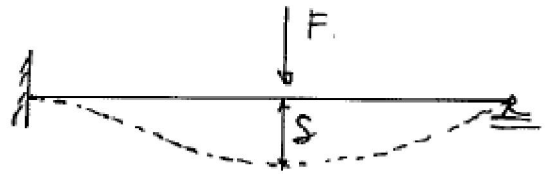

Ad
ξ=0
1
1
ζ
Ad
2,55
2,50
ξ=0,2
1
0,96
1
ζ
180°
φ
ξ=0
90°
0
1
ζ
180°
φ
ξ=0,2
90°
0
0,96
1
ζ
a) bez prigušenja
b) s prigušenjem

slika 2.

b) Osnovne značajke ekvivalentnog sustava na slici 1b) su:

*Krutost k:* $k = \frac{F}{\delta} \quad \delta = \frac{7Fl^3}{96EI} \qquad k = \frac{96EI}{7l^3} = 25kN/m$

Prigušenje ξ: $\xi = \frac{c}{2\sqrt{km}} = 0,2$




Sada je: $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = 7\,rad/s$

Najveći koeficijent dinamičnosti se dobije iz uvjeta maksimalnog nazivnika:

$$f(\beta) = (1-\beta^2)^2 + 4\xi^2\beta^2$$

$\frac{df(\beta)}{d\beta} = 0 \rightarrow \qquad \beta_{max} = \sqrt{1-2\xi^2} = 0,96$

$$A_{d,max} = \frac{1}{2\xi\sqrt{1-2\xi^2}} = 2,55$$

Amplituda za $A_{d,max}$ iznosi:

$$u_{max} = u_{st} \cdot A_{d,max} = \frac{F_0}{k} A_{d,max} = 0,051m$$

A fazni kut: $\emptyset_{max} = arctg\,\frac{2\xi\beta_{max}}{1-\beta^2{}_{max}} = \mathrm{arctg}\frac{1}{\xi}\sqrt{1-2\xi^2} = 78,2°$

Rezonantni koeficijent dinamičnosti je: $A_{d,rez} = \frac{1}{2\xi} = 2{,}5$

Amplituda: $u_{rez} = u_{st} \cdot A_{d,rez} = 0{,}05m$

Fazni kut: $\emptyset = 90°$

Uočljivo je da se u slučaju neposredne sile pobude, najveća vrijednost koeficijenta dinamičnosti nalazi nešto lijevo od rezonantnog pravca za β=1, slika 2b. Ovo odstupanje se povećava s povećanjem prigušenja (veći ξ).

U stvarnosti su ova dva odstupanja zanemarivo mala, te se operira s rezonantnim vrijednostima.

c) Maksimalna frekvencija sile pobude je:

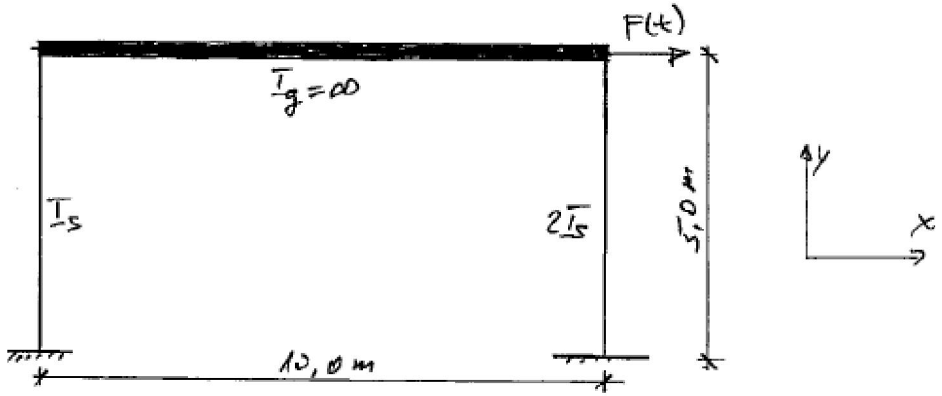
$$\beta_{max} = \frac{\Omega_{max}}{\omega} \quad \rightarrow \quad \Omega_{max} = \omega\beta_{max} = 6{,}7s^{-1}$$

Za usporedbu, pri rezonanciji je: $\Omega_{rez} = \omega = 7{,}0s^{-1}$

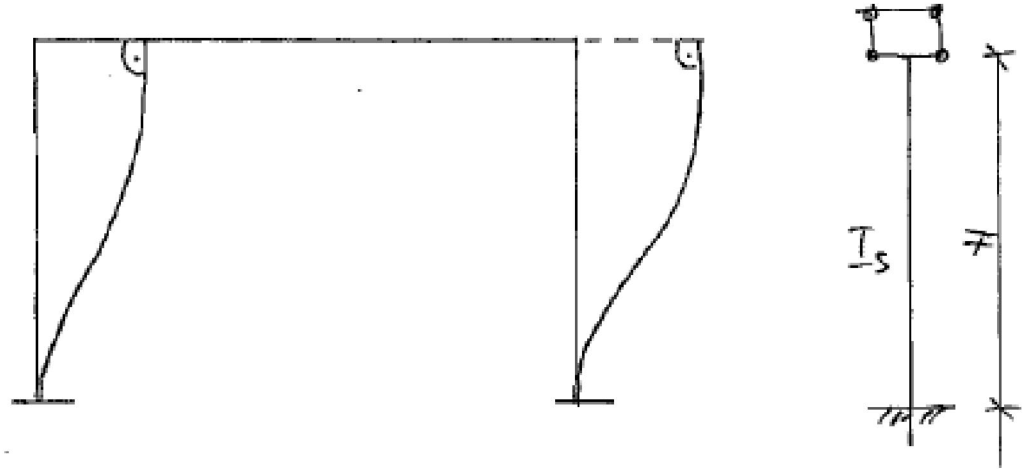
## ***Zadatak br.2***

Za zadan i sustav odrediti kružne frekvencije i periode prigušenih i neprigušenih oscilacija, dijagram momenata savijanja i maksimalni pomak vrha stupova. Formirati dinamički model s koncentriranim masama u gornjim čvorovima konstrukcije.

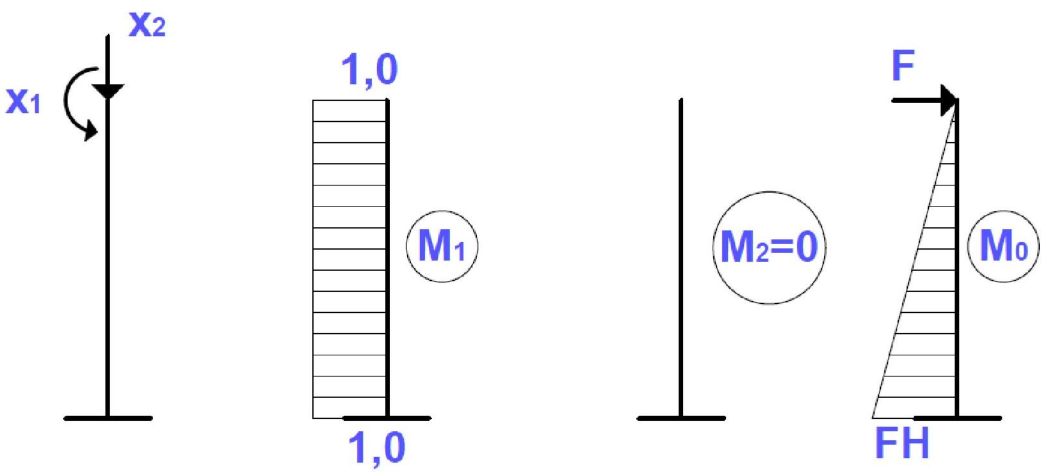
Zadano je : G=2000kN, E=30GPa, $I_s=3{,}125\cdot10^{-3}m^4$, $\xi=0{,}03$, $F(t)=100\sin(0{,}8\Omega t)$




Budući da se greda razmatra kao apsolutno kruta slijedi da je:



Sustav je statički neodređen, te je potrebno odrediti statički prekobrojne veličine(dvije):




$$I_c = I_s = I$$
$$\mathrm{EI}\delta_{11} = H$$
$$\mathrm{EI}\delta_{22} = 0$$
$$\mathrm{EI}\delta_{12} = 0$$
$$\mathrm{EI}\delta_{10} = -\frac{1}{2}FH^2$$
$$\mathrm{EI}\delta_{20} = 0$$

Jednadžba ravnoteže:

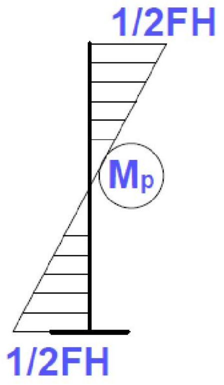
$$\delta_{11}x_1 + \delta_{12}x_2 + \Delta_{1p} = 0 \qquad (1)$$

$$\delta_{21}x_1 + \delta_{22}x_2 + \Delta_{2p} = 0 \qquad (2)$$

Iz jednadžbe (1) slijedi: $x_1H + x_2 0 - \frac{1}{2}FH^2 = 0 \;\rightarrow\; x_1 = \frac{1}{2}FH_1$

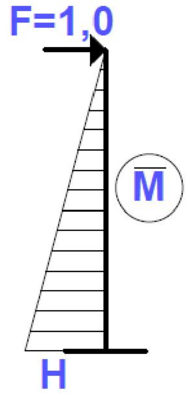
Iz jednadžbe (2): $x_2 = 0$

Zatim je potrebno odrediti horizontalni pomak grede:




$$\delta = \int_l \frac{M_p \bar{M}}{EI} dl$$

$M_p$ za F=1




$$\delta = \frac{1}{EI}\left[\frac{\frac{1}{2}H \cdot H}{2}\left(\frac{2}{3}H - \frac{1}{3}H\right)\right] = \frac{H^3}{12EI}$$

$$k = \frac{1}{\delta} = \frac{12EI}{H^3}$$

Ukupna krutost oba štapa je:

$$k^{uk} = \frac{12EI}{H^3} + \frac{12E \cdot 2I}{H^3} = \frac{36EI}{H^3}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k^{uk}}{m}} = \sqrt{\frac{36EI \cdot 9{,}81}{G \cdot H^3}} = \sqrt{\frac{36 \cdot 30 \cdot 10^6 \cdot 3{,}125 \cdot 10^{-3} \cdot 9{,}81}{2000 \cdot 5^3}}$$

$$\omega = 11{,}508\, rad/s$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 0{,}5459s$$

Frekvencija prigušenih oscilacija: $\omega_d = \omega\sqrt{1 - \xi^2} = 11{,}503\mathrm{rad/s}$

$$T_d = \frac{2\pi}{\omega_d} = 0{,}5462\ s$$

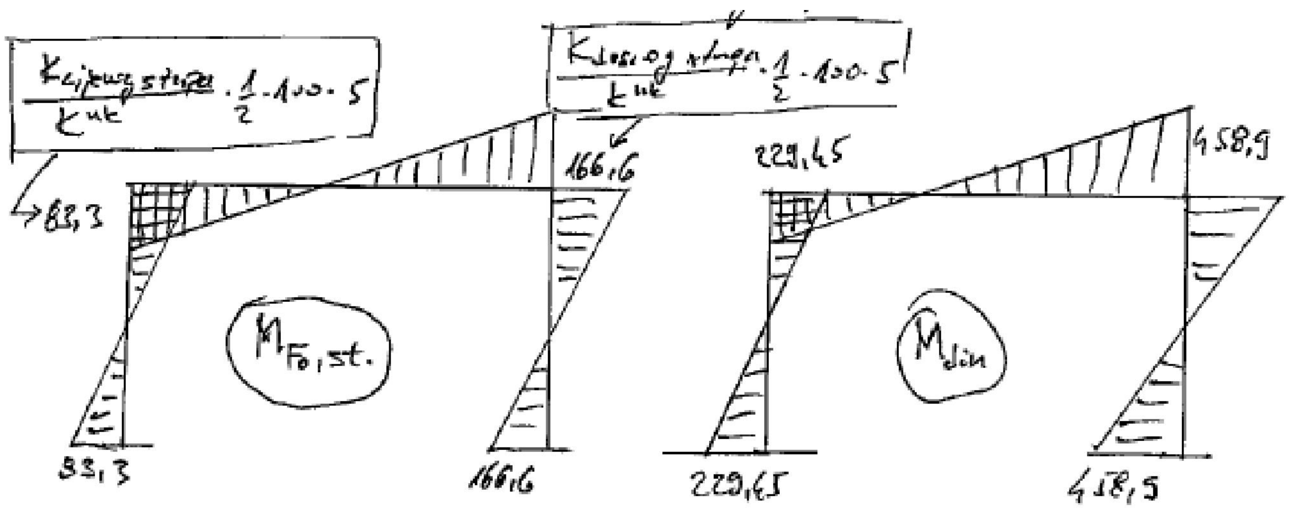
$$A_d = \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}}$$

$$\beta = \frac{\Omega}{\omega} = \frac{0{,}8\omega}{\omega} = 0{,}8$$

$$A_d = 2{,}753 - koeficijent\ dinami\check{c}nosti$$

$$(amplituda\ dinami\check{c}kog\ djelovanja)$$

Dijagram momenata savijanja :




$M_{G,stat}$-statički moment uslijed težine G

Maksimalni pomak vrhova stupova:

$$x_{max} = X_{G,st} + A_d \cdot X_{F_0,st} = 0 + 2{,}753 \cdot 100 \cdot \frac{5^3}{36 \cdot 30 \cdot 10^6 \cdot 3{,}125 \cdot 10^{-3}} =$$

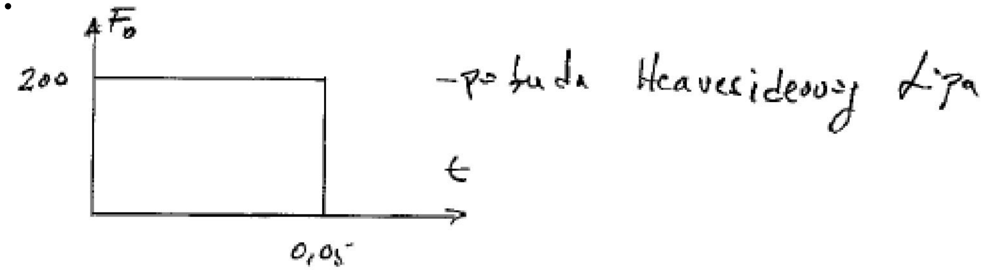
$$= 2{,}753 \cdot 3{,}7037 \cdot 10^{-3} = 0{,}0102m = 1{,}02cm$$

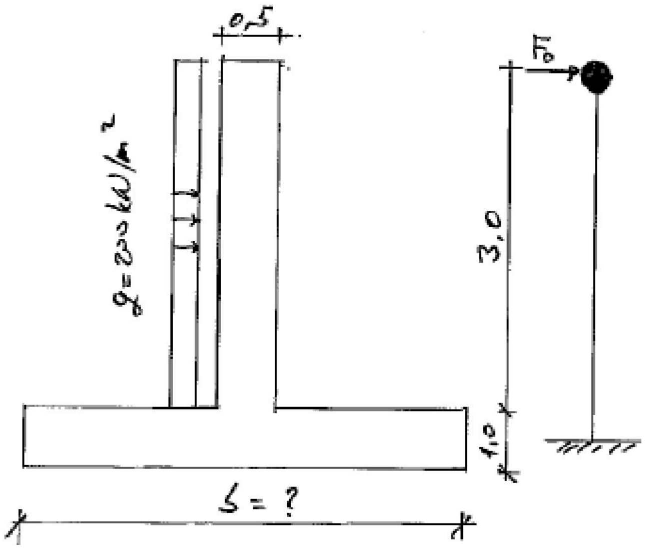
## ***Zadatak br.3***

Skladište plina je zaštićeno AB zidom zbog mogućnosti eksplozije plina. Djelovanje eksplozije je simulirano jednoliko raspodijeljenim opterećenjem q=200kN/m2 u trajanju od 0,05s. Odrediti širinu temelja zida koja će zadovoljiti uvjet njegovog prevrtanja. Za dinamički model uzeti konzolu s jednim stupnjem slobode.

$E=30\cdot10^6 kN/m^2$

$\Gamma=25kN/m^3$



$$m = \frac{G}{g} = 0{,}5 \cdot 3{,}0 \cdot 25 \cdot \frac{1}{9{,}81} = 3{,}822 kNs^2/m$$

Krutost konzole na savijanje: $k = \frac{3EI}{h^3}$

$$I = \frac{1{,}0 \cdot 0{,}5^3}{12} = 0{,}010416 m^4$$

$k = \frac{3 \cdot 30 \cdot 10^6 \cdot 0{,}010416}{3{,}0^3}$=34720,0kN/m

Frekvencija slobodnih neprigušenih oscilacija:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{34720{,}0}{3{,}82}} = 95{,}33 s^{-1}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 0{,}0658 s$$

Amplituda vanjske sile pobude: $F_0 = 200 \cdot 3{,}0 = 600{,}0 kN$

Rješenje pomaka za pobudu Havesideovog tipa bez prigušenja:

$$U = \frac{F_0}{k}(1 - cos\omega t)$$

$$F_{max} = k \cdot u_{max}$$

$$u_{max} \rightarrow \cos\omega t = -1 \rightarrow \omega t = \pi$$

$$t = \frac{\pi}{\omega} = \frac{\pi}{95,33} = 0,033s \rightarrow vrijeme\ u\ kome\ se\ javlja$$

$$maksimalni\ pomak\ vrha\ zida\ (konzole)$$

Napomena: U slučaju pobude Havesideovog tipa dinamički faktor(omjer dinamičkog i statičkog pomaka) je jednak 2 ako nema prigušenja, a ako postoji prigušenje onda je dinamički faktor manji od 2.

Ovdje je D(t)=2

$F_{max} = F_0 \cdot D(t) = 600 \cdot 2 = 1200kN - maksimalna\ sila\ koja\ d$jeluje na vrhu konzole.

Moment prevrtanja:

$M^2{}_{max}$=$F_{max}(3,0 + 1,0) = 1200 \cdot 4,0 = 4800,0kNm$

$$M_g^A = (G_1 + G_2) \cdot \frac{b}{2} = (3{,}0 \cdot 0{,}5 \cdot 25 + 1{,}0 \cdot b \cdot 25)\frac{b}{2}$$

$$M_g^A = 12{,}5b^2 + 18{,}75b$$

$$\sum M_A = 0$$

$$M_{max}^{F_{max}} \geq M_g^A \qquad M_{max}^{F_{max}} = F_{max} \cdot 4{,}0 = 4800{,}0kNm$$

$$12{,}5b^2 \cdot +18{,}75b - 4800{,}0 = 0$$

$$b_{1,2} = \frac{-1{,}5 \pm \sqrt{(1{,}5)^2 + 4 \cdot 384{,}0}}{2} = \frac{-1{,}5 \pm 39{,}22}{2}$$

$$b \geq 18{,}86m$$