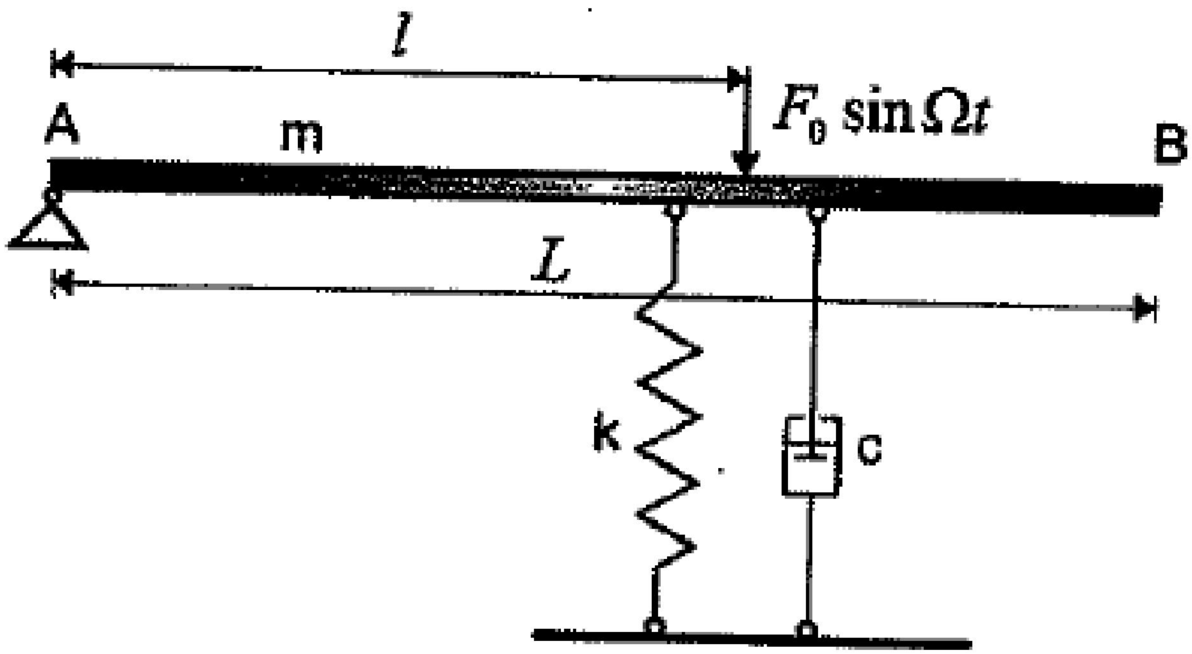
Dinamika konstrukcija i potresno inženjerstvo

Vježbe br.2 **16.03.12.**

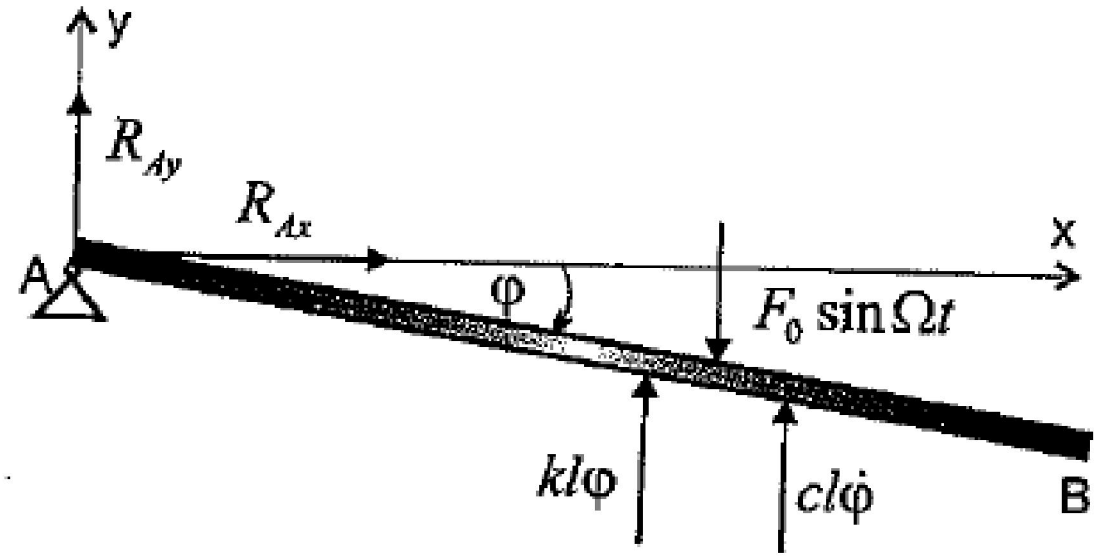
Zadatak br.1

Za sustav prikazan na slici odrediti maksimalnu amplitudu stacionarnih prisilnih oscilacija točke B, te fazni kut kašnjenja odziva pobudom. Prigušenje sustava je jednako polovici kritičnog prigušenja. Pretpostaviti da se radi o malim oscilacijama. U prikazanom položaju sustav je u statičkoj ravnoteži. Uzeti da sila prigušenja i elastična sila djeluju na istom mjestu kao i vanjska sila pobude $F_0 \sin\Omega t$. Zadano je: m, l, L, k, c, F_0.



Primjenom zakona rotacije krutog tijela oko nepomične osi koja prolazi kroz točku A: $I_A\ddot{\varphi} = M$ dobije se diferencijalna jednadžba gibanja:

$$I_A\ddot{\varphi} + cl^2\dot{\varphi} + kl^2\varphi = F_0 l\, sin\Omega t$$



$$\varphi_{stat} = \frac{F_0 l}{kl}$$

U zadatku je zadano: $\xi = \frac{cl}{c_{krit.}} = 0.5$

Pa je max.amplituda oscilacija: $\eta_{max} = \sqrt{1-2\xi^2} = 0.707$

β Ad

Omjer frekvencija: $\eta = \frac{\Omega}{\omega}, \quad \frac{\varphi}{\varphi_{stat.}} = M(\eta) = \frac{1}{\sqrt{(1-\eta^2)^2 + (2\xi\eta)^2}}$

Dinamički faktor amplifikacije (povećanja)

$$\varphi = \frac{\varphi_{stat.}}{\sqrt{\left[1-\left(\frac{\Omega}{\omega}\right)^2\right]^2 + \left(2\xi\frac{\Omega}{\omega}\right)^2}} = \frac{\varphi_{stat.}}{\sqrt{(1-\eta^2)^2 + (2\xi\eta)^2}}$$

Amplituda stacionarnih prisilnih oscilacija

Frekvencija sile pobude pri kojoj je amplituda stacionarnih prisilnih oscilacija najveća se odredi iz uvjeta maksimalne vrijednosti faktora povećanja:

$$\frac{d}{d\eta}\big(M(\eta)\big)=0,\quad \frac{d^2}{d\eta^2}\big(M(\eta)\big)<0 \quad \Rightarrow \eta_{\max.}=\sqrt{1-2\xi^2}$$

$$M_{\max.}=\frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}},$$

Maksimalna amplituda: $\varphi_{\max.}=\dfrac{\varphi_{stat.}}{M_{\max.}}=\dfrac{\varphi_{stat.}}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}=1.1547\dfrac{F_0\cdot l}{kl}$

Za oscilacije malih amplituda vrijedi da je pomak točke B štapa jednak $y_B \approx L\cdot\varphi$, pa je maksimalna amplituda točke B:

$$\boxed{(y_B)_{\max.}=L\cdot\varphi_{\max.}=1.1547\frac{F_0 l\cdot L}{kl},}$$

a fazni kut:

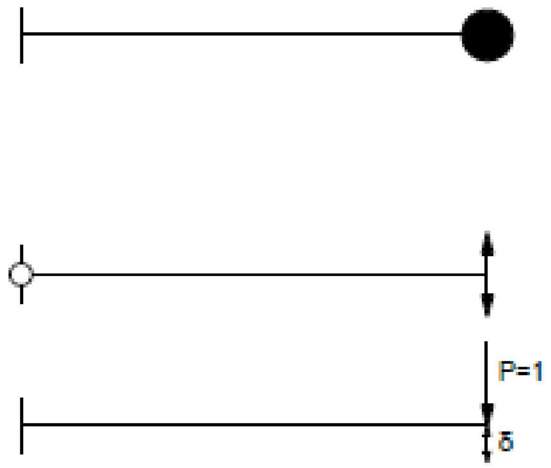
$$\boxed{\alpha=arctg\frac{2\xi\eta_{\max.}}{1-\eta^2_{\max.}}=54.74^0.}$$

Zadatak br.2

Za dinamički sustav iz 1. zadatka prošle vježbe odrediti y(t) za slučajeve prigušenja:

a) c=60 t/s

b) c= 1440 t/s



Koeficijent prigušenja:

$$\text{a) } \varepsilon = \frac{c}{2m} = \frac{60}{2\cdot 20} = 1.5\,1/s$$

$$\text{b) } \varepsilon = \frac{1440}{2\cdot 20} = 36\,1/s$$

Relativno prigušenje:

$$\text{a) } \zeta = \frac{\varepsilon}{\omega} = \frac{1.5}{30} = 0.05$$

$$\text{b) } \zeta = \frac{36}{30} = 1.2$$

Rješenje za ζ = 0,05:

$$\omega_d = \omega\sqrt{1-(\frac{\varepsilon}{\omega})^2} = \omega\sqrt{1-\zeta^2} = 30\sqrt{1-0.05^2} = 29.9625 rad/s$$

$$T_d = \frac{2\pi}{\omega_d} = \frac{2\pi}{\omega\sqrt{1-\zeta^2}} = \frac{2\pi}{30\sqrt{1-0.05^2}} = 0.2097s$$

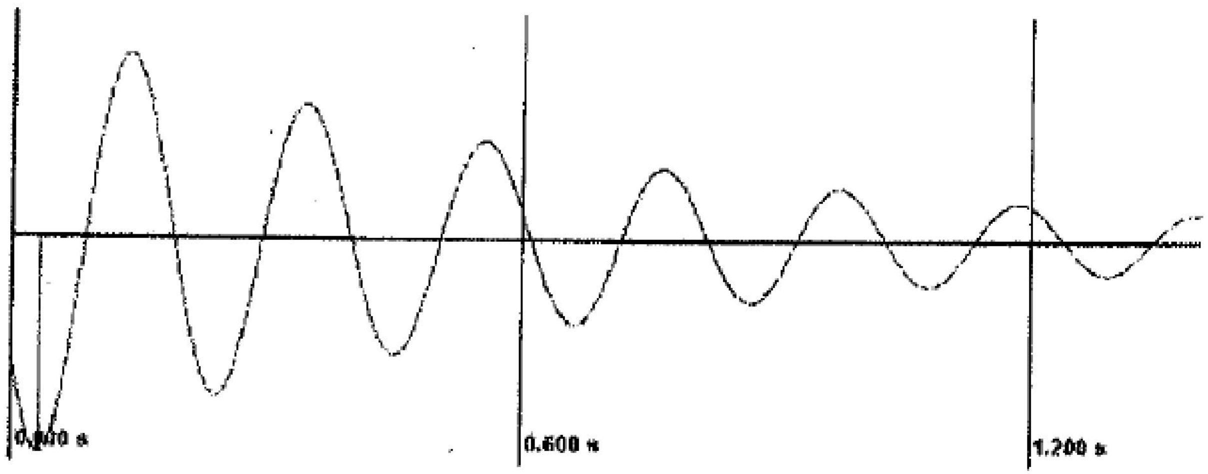
$$C = \sqrt{(\frac{v_0+\varepsilon y_0}{\omega_d})^2 + y_0^2} = \sqrt{(\frac{0.5+1.5\cdot 0.0109}{30\sqrt{1-0.05^2}})^2 + 0.0109^2} = 0.0204m = 2.04cm$$

$$tg(\alpha) = \frac{y_0\omega}{v_0+\varepsilon y_0} = \frac{0.0109\cdot 30}{0.5+1.5\cdot 0.0109} = 0.6333 \Rightarrow \alpha = arctg(\frac{y_0\omega}{v_0+\varepsilon y_0}) = 0.565rad$$

$$y(t) = Ce^{-\varepsilon t}\sin(\omega_d t+\alpha) = 2.04e^{-1.5t}\sin(29.9625t+0.565)cm$$

Trenutak dostizanja prve amplitude: $-\frac{\alpha}{\omega_d}+\frac{\pi}{2\omega_d}=-\frac{0.565}{29.9625}+\frac{\pi}{2\cdot 29.9625}=\mathbf{0.034s}$

$$y_{max}=y(0.034)=2.04e^{-1.5\cdot 0.034}\sin(29.9625\cdot 0.034+0.565)=1.94cm$$



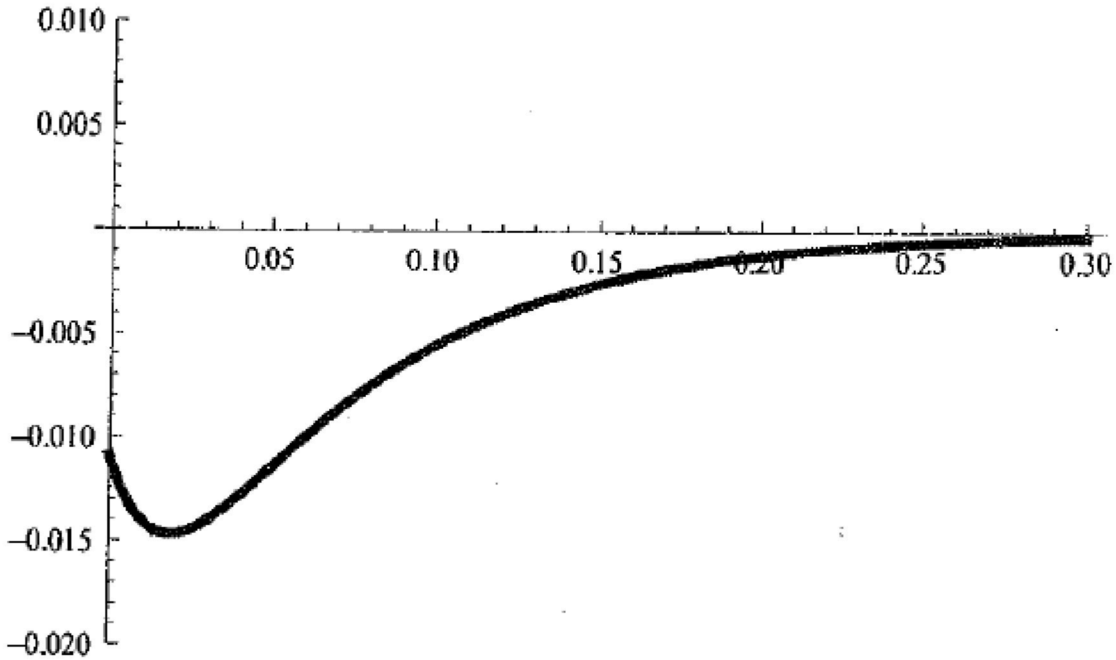
Komentar: za prigušenje ζ = 0,05 period T i T_d se razlikuju za ~0,15% (prigušenje amplitude).

Rješenje za ζ = 1,20:

$$A = \frac{v_0 + y_0\omega(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})}{2\omega\sqrt{\zeta^2 - 1}} = \frac{0.5 + 0.0109 \cdot 30 \cdot (1.2 + \sqrt{1.2^2 - 1})}{2 \cdot 30\sqrt{1.2^2 - 1}} = 0.0279$$

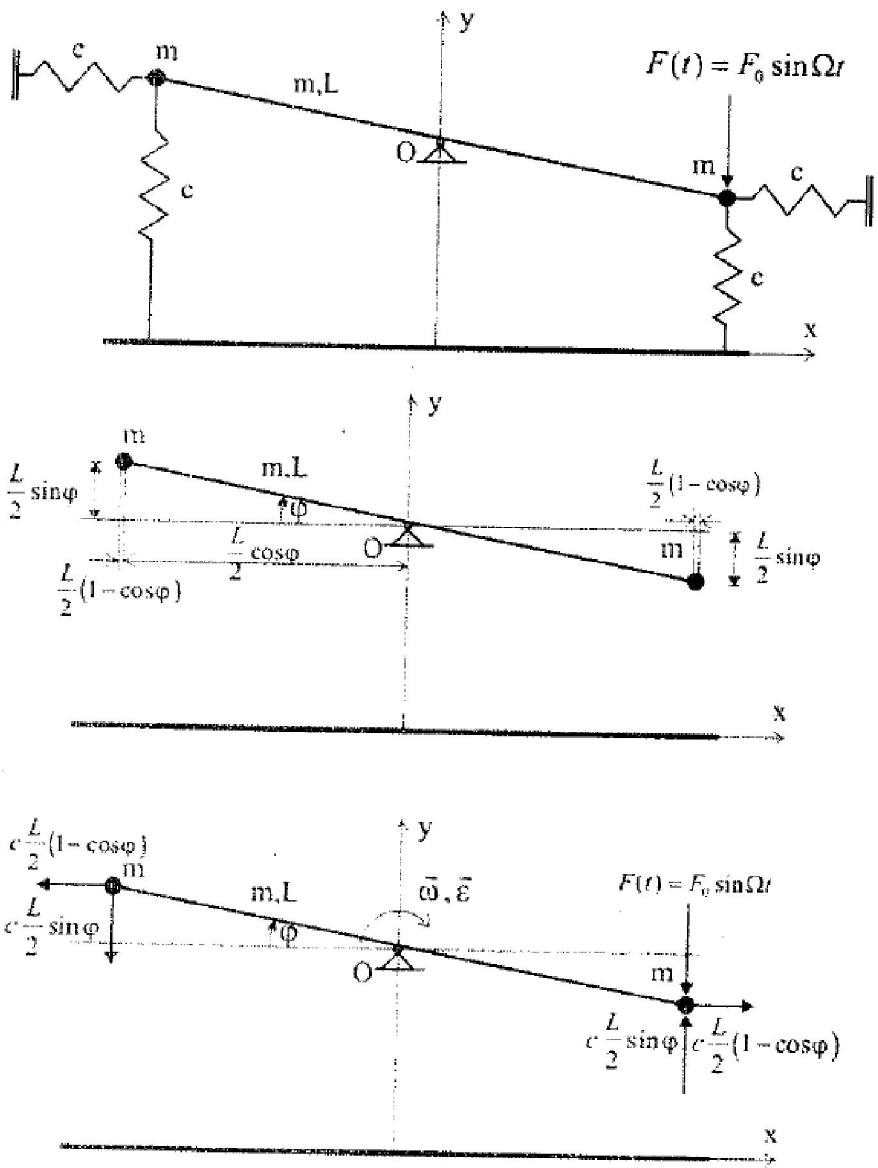
$$B = \frac{-v_0 + y_0\omega(-\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})}{2\omega\sqrt{\zeta^2 - 1}} = \frac{-0.5 + 0.0109 \cdot 30 \cdot (-1.2 + \sqrt{1.2^2 - 1})}{2 \cdot 30\sqrt{1.2^2 - 1}} = -0.0170$$

$$y(t) = Ae^{(-\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega t} + Be^{-(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega t} = 0.0279e^{(-1.2 + \sqrt{1.2^2 - 1})30t} + (-0.0170)e^{-(1.2 + \sqrt{1.2^2 - 1})30t}$$



Zadatak br.3

Štap mase m i duljine L se nalazi u vertikalnoj ravnini x,y i u sredini je vezan nepomičnim osloncem u točki O, a na krajevima s po dvije opruge iste krutosti c. Opruge su nenapete kada su u vodoravnom polozaju. Na oba kraja štapa se nalazi po jedna koncentrirana masa m. Na desnom kraju štapa djeluje harmonijska sila pobude F(t)=$F_0 sin\Omega t$. Odrediti zakon gibanja štapa, pri malim oscilacijama $(sin\varphi \approx \varphi, cos\varphi \approx 1)$, uz pretpostavku o homogenim početnim uvjetima



Diferencijalnu jednadžbu gibanja štapa možemo izvesti s pomoću *Zakona o promjrni momenta količine gibanja*, ili primjenom Lagrange-ovih jednadžbi.

$$I\varepsilon = M_R^S, \tag{3.1}$$

gdje je $\varepsilon = \ddot{\varphi}$ kutno ubrzanje štapa, dok je I moment tromosti štapa u odnosu na njegovo središte mase (točka O). Veličina M_R^S je moment svih sila u odnosu na središte mase. Moment tromosti I, osim momenta tromosti samoga štapa, uključuje i utjecaj dvije koncentrirane mase na krajevima štapa:

$$I = \frac{1}{12}mL^2 + 2m\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{7}{12}mL^2. \tag{3.2}$$

Sve opruge su istih krutosti c i na zadnjoj slici su prikazane sile u oprugama koje odgovaraju štapu u proizvoljnom položaju. Na slici nisu prikazane sile od vlastite težine (rezultirajuća težina štapa i koncentriranih masa na krajevima štapa) jer one ne utječu na gibanje štapa jer su momenti od tih sila u ravnoteži. Prema tome, moment od vanjskih sila je:

$$M_R^S = -c\frac{L}{2}\sin\varphi\cdot 2\cdot\frac{L}{2}\cos\varphi - c\frac{L}{2}(1-\cos\varphi)\cdot 2\cdot\frac{L}{2}\sin\varphi + F_0\sin\Omega t\cdot\frac{L}{2}\cos\varphi. \tag{3.3}$$

Vidi se da sile u oprugama formiraju spregove, u vertikalnim oprugama pozitivnog, a u vodoravnom negativnog predznaka. Ako promatramo slučaj malih oscilacija onda je $\varphi \approx 0$, pa je $\sin\varphi \approx \varphi$, a $\cos\varphi \approx 1$. Vraćanjem ovih vrijednosti u gornji izraz, moment sila u vodoravnim oprugama postaje nula (te sile ne utječu na gibanje štapa u slučaju malih oscilacija), preostali članovi postaju:

$$M_K^S = -\frac{1}{2}cL^2\varphi + \frac{L}{2}F_0 \sin\Omega t \tag{3.4}$$

Vraćanjem jednadžbi (3.4) i (3.2) u jednadžbu (3.1) dobivamo:

$$\frac{7}{12}mL^2 \cdot \ddot{\varphi} = -\frac{1}{2}cL^2\varphi + \frac{L}{2}F_0 \sin\Omega t\ , \tag{3.5}$$

odnosno, nakon sređivanja:

$$\ddot{\varphi} + \frac{6}{7}\frac{c}{m} \cdot \varphi = \frac{6}{7}\frac{F_0}{mL}\sin\Omega t\ . \tag{3.6}$$

Opće rješenje gornje diferencijalne jednadžbe je dano u obliku zbroja općeg rješenja homogene jednadžbe i partikularnog rješenja nehomogene jednadžbe: $\varphi = \varphi_h + \varphi_p$. Oće rješenje homogene jednadžbe je:

$$\varphi_h = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t, \qquad \omega = \sqrt{\frac{6c}{7m}}, \tag{3.7}$$

dok je partikularno rješenje

$$\varphi_p = A \sin \Omega t \tag{3.8}$$

Vraćanjem rješenja (3.8) u jednadžbu (3.6) dobivamo:

$$\left(-\Omega^2 + \omega^2\right) A = \frac{6}{7} \frac{F_0}{mL}, \tag{3.9}$$

odakle se, nakon sređivanja, dobiva:

$$A = \frac{6}{7} \frac{F_0}{mL} \cdot \frac{1}{\left(-\Omega^2 + \omega^2\right)}, \quad A = \frac{F_0}{cL\left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2}\right)}. \tag{3.10}$$

Sada je opće rješenje:

$$\varphi(t) = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t + A \sin \Omega t. \tag{3.11}$$

Prvi izvod gornje jednadžbe je:

$$\dot{\varphi}(t) = -\omega C_1 \sin \omega t + \omega C_2 \cos \omega t + A\Omega \cos \Omega t. \tag{3.12}$$

Unoseći u jednadžbe (3.11) i (3.12) homogene početne uvjete $\varphi(0) = 0, \dot{\varphi}(0) = 0$ dobivamo:

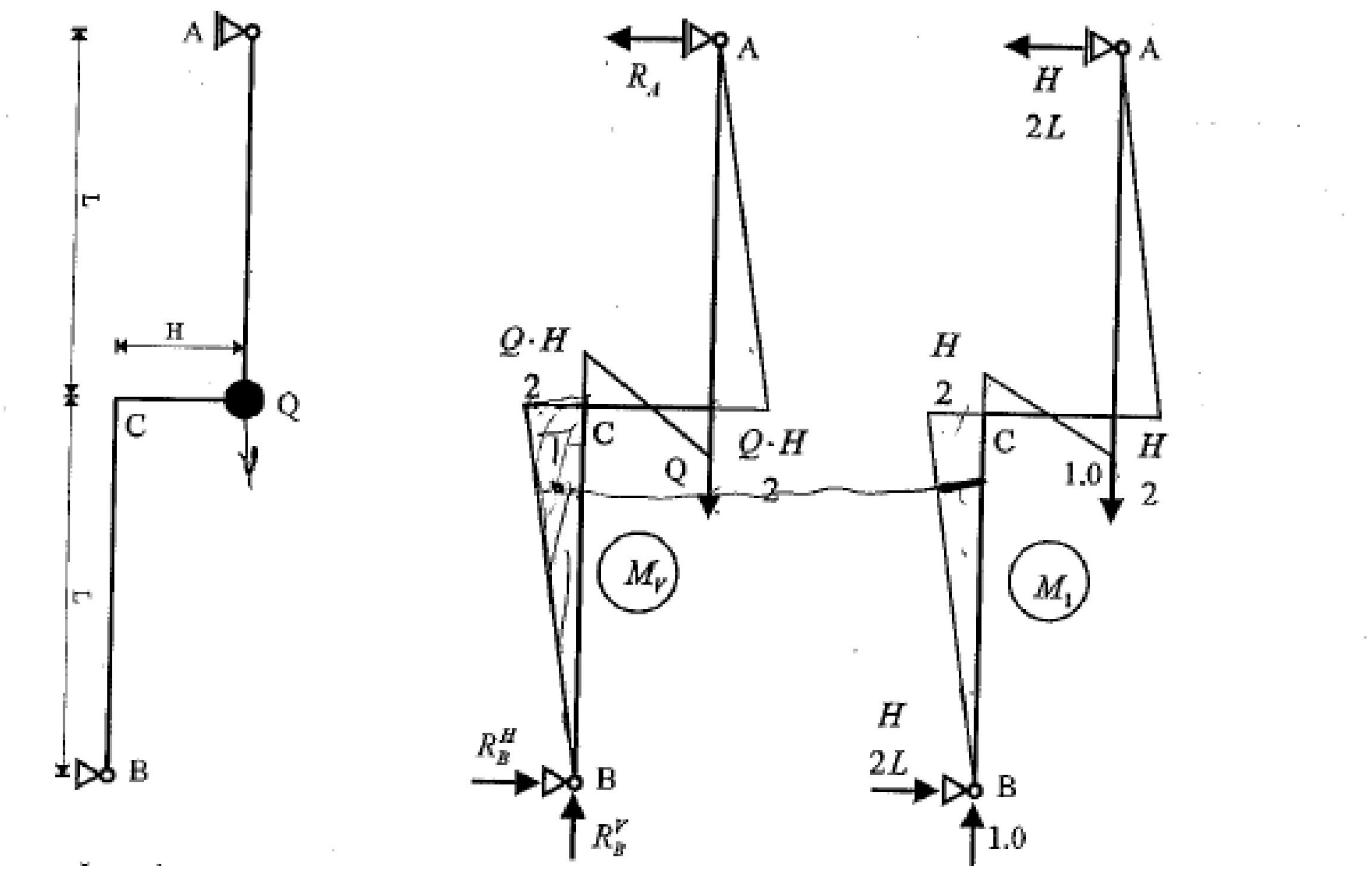
$$\begin{aligned} \varphi(0) = 0 \quad &\Rightarrow C_1 = 0 \\ \dot{\varphi}(0) = 0 \quad &\Rightarrow C_2 = -A\frac{\Omega}{\omega}, \end{aligned} \tag{3.13}$$

pa je konačna jednadžba malih oscilacija štapa:

$$\boxed{\varphi(t) = \frac{F_0}{cL\left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2}\right)}\left(\sin \Omega t - \frac{\Omega}{\omega}\sin \omega t\right).} \tag{3.14}$$

Zadatak br.4

Odrediti period vertikalnih oscilacija tereta $Q = 5kN$ ako svi štapovi sustava imaju isti moment tromosti $I = 0.003m^4$, te modul elastičnosti $E = 30000kN/m^2$. Duljine štapova su $L = 2.0m$, $H = 1.0m$.



Iz uvjeta ravnoteže u pravcu dviju okomitih osi odredimo reakcije oslonaca A i B, pa imamo:

$$R_A = -R_B^H = \frac{QH}{2L} = 1.25kN, \quad R_B^V = Q = 5kN. \tag{3.1}$$

Vrijednosti momenata savijanja u točkama C i Q su prikazane na drugoj skici, koja predstavlja dijagram momenata od vanjskog opterećenja, tj. tereta Q.

Sada na istom, statički određenom osnovnom sustavu, zadamo jediničnu silu u pravcu u kom tražimo pomak, odnosno statički progib, jer nam je on potreban za određivanje krutosti sustava. Dijagram momenata od te jedinične sile je prikazan na trećoj skici. Sada množenjem odgovarajućih momentnih površina prvog ili drugog dijagrama s odgovarajućim ordinatama u težištu drugog ili prvog dijagrama dobivamo progib na mjestu djelovanja tereta Q.

$$f_{stat.} = \frac{1}{EI}\int_0^L M_Q M_1 \, dL \tag{3.2}$$

odnosno:

$$f_{stat.} = \frac{1}{EI}\left(\frac{1}{2} L \cdot \frac{QH}{2} \frac{H}{3} \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{H}{2} \cdot \frac{QH}{2} \cdot \frac{H}{3} \cdot 2\right) = \frac{1}{EI}\frac{QH^2(2L+H)}{12}. \tag{3.3}$$

S druge strane znademo da je:

$$f_{stat.} = \frac{Q}{K}, \tag{3.4}$$

gdje je K krutost sustava.

Iz jednadžbi (3.3) i (3.4) imamo:

$$K = \frac{12EI}{H^2(2L+H)}, \tag{3.5}$$

pa je konačno period vertikalnih oscilacija tereta Q:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}} = 2\pi\sqrt{\frac{Q}{gK}} = 2\pi\sqrt{\frac{f_{stat.}}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{QH^2(2L+H)}{12EIg}}. \tag{3.6}$$

Nakon uvrštenja numeričkih podataka imamo:

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{5\cdot 1.0^2(2\cdot 2+1)}{12\cdot 30000\cdot 0.003\cdot 9.81}} = 0.305s} \tag{3.7}$$