KOMBINATORIKA

IV. PREDAVANJE

Uvod

- **Kombinatorika** je grana matematike koja se bavi prebrojavanjem elemenata konačnih skupova i prebrojavanjem broja načina da se ti elementi poredaju.
- **Faktorijeli**
  Umnožak prvih n prirodnih brojeva označavamo ***n* !** i čitamo "n faktorijela".

  $1!=1,\quad 2!=2\cdot 1=2,\quad 3!=3\cdot 2\cdot 1=6,\quad 4!=4\cdot 3\cdot 2\cdot 1=24,$

  $5!=5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1=120,\ldots$
- Po definiciji stavljamo 0!=1.
- Faktorijeli zadovoljavaju rekurzivnu formulu $n!=n\cdot(n-1)!$
- **Binomni koeficijenti**
- Neka je *n* prirodan broj i *k* prirodan broj ili 0, $k\leq n$,
- binomni koeficijent označavamo $\binom{n}{k}$
- Čitamo n "iznad (ili povrh) *k*" i definiramo:

$k \geq 1 \qquad \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

$k = 0 \qquad \binom{n}{0} = 1$

<u>Teorem o uzastopnom prebrojavanju</u>

Proučavamo uređene parove. Neka prvi element uređenog para možemo izabrati na n_1 načina, a za već izabrani prvi element, drugi možemo izabrati na n_2 načina. Tada uređeni par možemo izabrati na
$N = n_1 \cdot n_2$ načina.

Primjer 1: Bacamo dvije kocke različite boje. Na koliko načina mogu pasti?

$$N = 6 \cdot 6 = 36$$

- **Primjer 2:** U gradu ima 85 osnovnih škola ravnomjerno raspoređenih u 17 gradskih četvrti. Obitelj s jednim školskim djetetom kupuje stan. Na koliko načina može odabrati četvrt i školu ako:

  a) nije bitno da škola bude u istoj četvrti;

  b) škola mora biti u istoj četvrti kao i stan.

a) $N = 17 \cdot 85 = 1445$

b) $N = 17 \cdot 5 = 85$

Teorem o uzastopnom prebrojavanju vrijedi općenito

- Proučavamo uređene k-torke. Neka prvi element uređene k-torke možemo izabrati na n_1 načina, a za već izabrani prvi element, drug možemo izabrati na n_2 načina i tako dalje do k-tog koji možemo izabrati na n_k načina. Tada uređenu k-torku možemo izabrati na

  $N = n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k$ načina.

Primjer: Koliko ima četveroznamenkastih brojeva s različitim znamenkama.

Rješenje:

Prvu znamenku možemo birati po volji,

9 je mogućih izbora (na prvom mjestu ne smije biti nula).
Bez obzira koju smo prvu znamenku izabrali, drugu znamenku biramo između 9 preostalih (sad možemo uzeti i nulu).
Treću znamenku biramo između 8 preostalih, a četvrtu između 7 preostalih.
Dakle, četveroznamenkastih brojeva s različitim znamenkama ima $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 4536$

- **Permutacije bez ponavljanja**
- Permutirati znači zadane elemente na sve moguće načine spajati u skupine tako da svaka skupina sadrži sve zadane elemente.
  Broj permutacija skupa od *n* različitih elemenata jednak je

$$P_n = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = n!$$

- **Primjer 1.** Koliko se troznamenkastih brojeva (s različitim znamenkama) može napisati od znamenki 1, 2, 3?

- To je broj permutacija bez ponavljanja od 3 elementa

$$P_3 = 3! = 3\cdot 2\cdot 1 = 6$$

Ispišimo ih: 123 132 213 231 312 321

- **Primjer 2.** Koliko permutacija elemenata skupa $\{2,4,6,8\}$ počinje s 8?

Skupine su oblika 8 _ _ _ , pri čemu na preostalim mjestima možemo napisati bilo koju permutaciju bez ponavljanja od elemenata skupa $\{2,4,6\}$

Možemo ih ispisati na $P_3 = 3! = 6$ različitih načina.

Permutacije s ponavljanjem

- Imamo skup od *n* elemenata od kojih je k_1 jednakih jedne vrste, k_2 jednakih druge vrste, k_r jednakih r-te vrste. Sastavljamo uređene n-torke. Svaka takva n-torka zove se **permutacija s ponavljanjem.** Broj permutacija s ponavljanjem je

$$P_n^{k_1,k_2,\dots,k_r} = \frac{n!}{k_1!\,k_2!\cdots k_r!}$$

Primjer: Koliko se različitih riječi (smislenih i besmislenih) može napisati od slova riječi MATEMATIKA?

Rješenje: Svaki raspored slova određuje jednu permutaciju.

Riječ je o nizu slova A,A,A,E,I,K,M,M,T,T. Broj permutacija s ponavljanjem od 10 elemenata među kojima ima jednakih (3 slova A, 2 slova M, 2 slova T, 1 slovo E, 1 slovo I i 1 slovo K) jednak je

$$P_{10}^{3,2,2} = \frac{10!}{3!\cdot 2!\cdot 2!} = 151200$$

Primjer 2: Koliko se brojeva može napisati od znamenaka 1,2,3,4,3,3,6,1,4 tako da neparne znamenke budu uvijek na neparnim mjestima.

Rješenje: Neparne znamenke 1,1,3,3,3 možemo razmjestiti na neparna mjesta (prvo, treće, peto, sedmo, deveto) na

$$P_5^{2,3} = \frac{5!}{2!\cdot 3!} = \frac{120}{2\cdot 6} = 10$$ načina.

Parne znamenke 2,4,4,6 možemo razmjestiti na parna mjesta (drugo, četvrto, šesto, osmo) na

$$P_4^{2} = \frac{4!}{2!} = \frac{24}{2} = 12$$ načina.

Ukupno možemo napisati $10\cdot 12 = 120$ brojeva.

Varijacije bez ponavljanja

- Iz skupa od *n* različitih elemenata sastavljamo uređene *k*-torke (*k*<=*n)*. Svaka uređena k-torka zove se varijacija k-tog razreda od n elemenata. Broj svih varijacija k-tog razreda je

$$V_n^{(k)} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

(Taj broj možemo odrediti koristeći princip uzastopnog prebrojavanja.)

Primjer 1: Koliko se troznamenkastih brojeva (s različitim znamenkama) može napisati pomoću znamenaka 1, 3, 5, 7, 9?

Rješenje: Traženi broj jednak je broju varijacija bez ponavljanja 3. razreda u skupu od 5 elemenata.

$$V_5^3 = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$$

Ili po principu uzastopnog prebrojavanja prvu znamenku možemo birati na 5 načina. Bez obzira koju smo prvu znamenku izabrali, drugu znamenku biramo između 4 preostale, treću između 3 preostale.

Primjer 2: Koliko se četveroznamenkastih brojeva s različitim znamenkama može napisati pomoću znamenaka 0, 1, 3, 5, 7, 9?

Rješenje: Uređenih četvorki od 6 elemenata ima

$$V_6^4 = 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3 = 360$$

Budući da brojevi ne mogu počinjati s nulom, moramo od dobivenog broja oduzeti one koji počinju s nulom.

To su brojevi oblika 0 _ _ _ , a njih ima

$$V_5^3 = 5\cdot 4\cdot 3 = 60$$

Dakle, četveroznamenkastih brojeva s različitim znamenkama koji se mogu napisati pomoću znamenaka 0, 1, 3, 5, 7, 9 ima

$$V_6^4 - V_5^3 = 360 - 60 = 300$$

Varijacije s ponavljanjem

- Iz skupa od n različitih elemenata sastavljamo uređene k-torke, ali tako da se elementi mogu ponavljati (k može biti i veći od n). Svaka takva uređena k-torka zove se varijacija s ponavljanjem k-tog razreda od n elemenata. Broj varijacija s ponavljanjem je

$$\overline{V}_n^{(k)} = n^k$$

Primjer 1: Lokot sa šifrom ima 4 koluta, a na svakom kolutu 10 slova naše abecede. Na koliko se načina može izabrati šifra za lokot?

Rješenje: Traženi broj jednak je broju varijacija s ponavljanjem 4. razreda u skupu od 30 elemenata.

$$\overline{V}_{30}^{4} = 30^4 = 810000$$

Šifra za lokot može se izabrati na 810 000 načina.

Primjer 2: Koliko se troznamenkastih brojeva može napisati pomoću znamenaka 1, 3, 5, 7, 9?

Rješenje: To je broj varijacija s ponavljanjem 3. razreda od 5 elemenata: $\overline{V}_{5}^{3} = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$

Ili, prema principu uzastopnog prebrojavanja prvu znamenku možemo odabrati na 5 načina, drugu i treću znamenku također na 5 načina (jer se znamenke mogu ponavljati)

Možemo napisati 125 troznamenkastih brojeva pomoću zadanih znamenaka.

Kombinacije bez ponavljanja

- Iz skupa od n različitih elemenata biramo k-člane podskupove (k<=n) (redosljed elemenata u skupu nije bitan). Svaki k-člani podskup zove se **kombinacija** k-tog razreda od n elemenata. Broj svih kombinacija k-tog razreda je

$$C_n^{(k)} = K_n^{(k)} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$$

Primjer 1: Na koliko načina možemo odabrati dva elementa skupa $\{1,2,3,4,5\}$?

Rješenje: Budući da poredak elemenata nije bitan mogući su sljedeći izbori:

12 23 34 45
13 24 35
14 25
15

Broj kombinacija 2. razreda u skupu od 5 elemenata jednak je

$$K_5^2 = \binom{5}{2} = \frac{5!}{2!\,3!} = 10$$

Dva elementa zadanog skupa možemo odabrati na 10 načina.

Primjer 2: Na koliko se načina može izvući 7 brojeva i jedan dopunski broj u igri LOTO 7 od 39?

Rješenje: Najprije se izvlači 7 brojeva od 39. To se može napraviti na

$$K_{39}^{7} = \binom{39}{7} = \frac{39!}{7!\cdot 32!} = 15380937$$

načina.

Nakon toga, dopunski se broj može izvući između preostala 32 broja na 32 načina. Ukupan broj načina je

$$32\cdot\binom{39}{7} = 492189984$$

Kombinacije s ponavljanjem

- Imamo skup od n različitih elemenata i neki broj k. Svaka neuređena k-torka elemenata iz skupa u kojoj se elementi mogu i ponavljati (redoslijed elemenata u k-torci nije bitan) zove se **kombinacija s ponavljanjem** k-tog razreda od n elemenata. Broj svih kombinacija s ponavljanjem k-tog razreda od n elemenata je

$$\overline{K}_n^{(k)} = \overline{C}_n^{(k)} \binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!\cdot k!}$$

Primjer 1: U cvjećarnici se prodaju mini ruže, ruže i ljiljani. Na koliko načina je moguće napraviti buket od 9 cvjetova?

Rješenje: U ponudi su 3 vrste cvijeća (n=3), formiramo buket od 9 cvjetova (k = 9), možemo birati ponovo istu vrstu cvijeća. Buket možemo napraviti na

$$\overline{K}_3^{(9)} = \overline{C}_3^{(9)} \binom{9+3-1}{9} = \binom{11}{9} = \frac{11!}{2! \cdot 9!} = 55$$

načina.