Pismeni dio ispita iz Matematike I

(strojari i građevinari)

Mostar, 11. lipanj 2003.

Zadatak 1. Naći sve kompleksne brojeve $z \in \mathbb{C}$ za koje je

$$z^4 - \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} = 0.$$

(Rješenja unijeti u Gaussovu ravninu).

Zadatak 2. Riješiti sustav linearnih jednadžbi:

$$\begin{aligned}
2\cdot x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \\
x_1 + 3\cdot x_2 + x_3 &= 5 \\
x_1 + x_2 + 5\cdot x_3 &= -7 \\
2\cdot x_1 + 3\cdot x_2 - 3\cdot x_3 &= 14
\end{aligned}$$

Zadatak 3. Dana je točka $M_1(1,\ 2,\ 8)$ i pravac $(p)\ldots\frac{x-1}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z}{1}$.

a) Odrediti točku M_2 simetričnu točki M_1 u odnosu na pravac (p);

b) Naći jednadžbu ravnine u kojoj leže točke M_2 i pravac (p).

Zadatak 4. Ispitati funkciju $y=\frac{4}{x^2}+\frac{4}{x}-3$ i nacrtati njen graf.

Zadatak 5. Naći $\lim\limits_{x\to 0}(ctgx)^{\frac{-2}{\ln x}}$.

Rješenja:

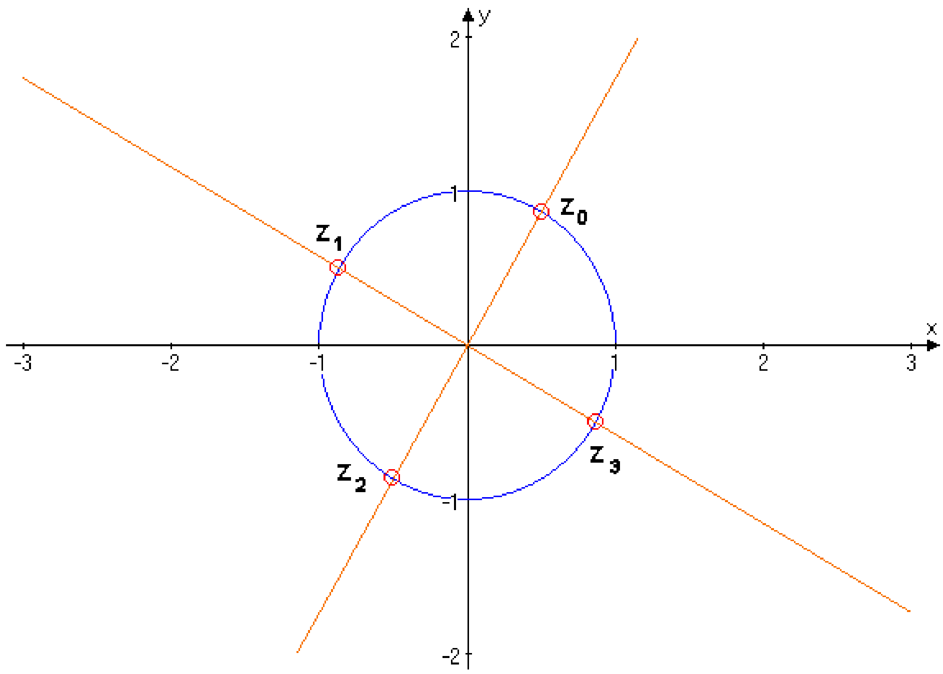
Zadatak 1. $z^4 - \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} = 0$ <=> $z^4 + \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = 0$ <=> $z^4 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ <=>

<=> $z = \sqrt[4]{-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}}$;

$$r = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}} = 1, \qquad \varphi = arctg\frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}} = arctg\sqrt{3} = \frac{4\pi}{3};$$

Sada je: $z = \sqrt[4]{1}\cdot\left(\cos\frac{\frac{4\pi}{3}+2k\pi}{4} + i\sin\frac{\frac{4\pi}{3}+2k\pi}{4}\right)$, $k = 0, 1, 2, 3$;

$$=> \begin{cases} z_0 = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \\ z_1 = \cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2} \\ z_2 = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \\ z_3 = \cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2} \end{cases}$$



Zadatak 2.

$$\begin{aligned} 2\cdot x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \\ x_1 + 3\cdot x_2 + x_3 &= 5 \\ x_1 + x_2 + 5\cdot x_3 &= -7 \\ 2\cdot x_1 + 3\cdot x_2 - 3\cdot x_3 &= 14 \end{aligned}$$

$$A_P = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & | & 2 \\ 1 & 3 & 1 & | & 5 \\ 1 & 1 & 5 & | & -7 \\ 2 & 3 & -3 & | & 14 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & | & 2 \\ 1 & 3 & 1 & | & 5 \\ 0 & -2 & 4 & | & -12 \\ 0 & 2 & -4 & | & 12 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & | & 2 \\ 1 & 3 & 1 & | & 5 \\ 0 & -2 & 4 & | & -12 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & | & 5 \\ 2 & 1 & 1 & | & 2 \\ 0 & -2 & 4 & | & -12 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & | & 5 \\ 0 & -5 & -1 & | & -8 \\ 0 & -2 & 4 & | & -12 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & | & 5 \\ 0 & -5 & -1 & | & -8 \\ 0 & -22 & 0 & | & -44 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \quad r(A_P) = r(A) = 3 = n \quad \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ sustav ima jedinstveno rješenje.

Iz potonje matrice slijedi:

$$\begin{aligned} -22x_2 &= -44 \Rightarrow x_2 = 2 \\ -5x_2 - x_3 &= -8 \Rightarrow x_3 = -2 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 &= 5 \Rightarrow x_1 = 1 \end{aligned}$$

Zadatak 3. $M_1(1,\ 2,\ 8)$, $(p)\ldots\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y}{-1} = \dfrac{z}{1}$ => $\vec{s}_p = (2,\ -1,\ 1)$

a) Povucimo prvo pravac (q) točkom M_1, okomito na pravac (p). Njegova jednadžba glasi: $(q): \dfrac{x-1}{a} = \dfrac{y-2}{b} = \dfrac{z-8}{c}$ => $\vec{s}_q$ = (a, b, c).

Zbog okomitosti pravaca (p) i (q) vrijedi $\vec{s}_p \cdot \vec{s}_q = 0$ <=> 2a – b + c = 0.

Uzmimo točku N (1, 0, 0) s pravca (p), pa ćemo iz uvjeta komplanarnosti vektora $\overrightarrow{M_1N}$, $\vec{s}_q$ i $\vec{s}_p$ dobiti sljedeće:

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & -8 \\ a & b & c \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad <=> \quad \underline{10a + 16b - 4c = 0.}$$

Riješimo sada sustav od gornje dvije jednadžbe, uz to da slobodno možemo uzeti neku od komponenti a ili b ili c, kao poznatu veličinu. Dakle, imamo:

10a + 16b – 4c = 0

2a – b + c = 0 | ·(–5)

$$\left.\begin{array}{r} 10a + 16b - 4c = 0 \\ \underline{-10a + 5b - 5c = 0} \end{array}\right\} +$$

=> b = $\frac{3}{7}$c, pa ako uzmemo c = 7, dobivamo b = 3 i a = –2 =>

$$\underline{(q): \frac{x-1}{-2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-8}{7}.}$$

Sada kada imamo pravac (q), možemo pronaći točku presjeka tog pravca i pravca (p), a nju je najlakše dobiti tako da jednadžbe pravaca (p) i (q) izrazimo u parametarskom obliku, pa iz uvjeta da točka presjeka pripada i jednom i drugom pravcu, lako dobivamo njene koordinate.

U našem slučaju točka presjeka je $\boxed{M_3 = (3, -1, 1)}$.

Poznato je kako za koordinate ove točke vrijedi: $x_3 = \frac{x_1 + x_2}{2}$, $y_3 = \frac{y_1 + y_2}{2}$, $z_3 = \frac{z_1 + z_2}{2}$, pa dobivamo: $x_2 = 2x_3 - x_1$, $y_2 = 2y_3 - y_1$, $z_2 = 2z_3 - z_1$, tj. $x_2 = 5$, $y_2 = -4$, $z_2 = -6$ => $\boxed{M_2 = (5, -4, -6)}$.

b) Jednadžbu tražene ravnine dobit ćemo pomoću formule za jednadžbu ravnine kroz tri točke, a koristit ćemo npr. sljedeće tri točke: $M_1(1, 2, 8)$, N $(1, 0, 0)$ i $M_3(3, -1, 1)$ (M_1 mora biti sadržana zbog uvjeta zadatka, a za druge dvije točke sigurno vrijedi da pripadaju pravcu (p)), stoga će biti:

$$\Pi \ldots \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-8 \\ 0 & -2 & -8 \\ 2 & -3 & -7 \end{vmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\Pi \ldots \quad 5x + 8y + 2z - 5 = 0}.$$

<u>Zadatak 4.</u> $y = \dfrac{4}{x^2} + \dfrac{4}{x} - 3 = \dfrac{4 + 4x - 3x^2}{x^2}$

1° $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\};$

2° Nule funkcije:

$f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 4 + 4x - 3x^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x_1 = 2 \text{ i } x_2 = -\frac{2}{3} \text{ su nule funkcije;}}$

3° (Ne)parnost funkcije: $f(-x) = \dfrac{4 - 4x - 3x^2}{x^2} \neq \pm f(x) \quad \Rightarrow$ <u>funkcija ni parna ni neparna.</u>

4° V.A. $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{4 + 4x - 3x^2}{x^2} = +\infty, \quad \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{4 + 4x - 3x^2}{x^2} = +\infty \quad \Rightarrow \quad x = 0$ je V.A.

K.A. / H.A.

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{4 + 4x - 3x^2}{x^2} = -3 \quad \Rightarrow \quad y = -3$ je H.A.

$k = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0 \quad \Rightarrow$ nema K.A.

5° Stacionarne točke:

$$y'=\frac{(4-6x)\cdot x^2-(4+4x-3x^2)\cdot 2x}{x^4}=\frac{4x^2-6x^3-8x-8x^2+6x^3}{x^4}=\frac{-4x^2-8x}{x^4}=$$
$$=\frac{-4x\cdot(x+2)}{x^4}=\frac{-4\cdot(x+2)}{x^3};$$

$y'=0 \quad\Leftrightarrow\quad x+2=0 \quad\Leftrightarrow\quad x=-2 \quad\Rightarrow\quad x=-2$ je stacionarna točka.

6° $D(f')=\mathbb{R}\setminus\{0\}$;

7° Točke infleksije i ekstremne točke:

$$y''=-4\cdot\frac{x^3-(x+2)\cdot 3x^2}{x^6}=-4\cdot\frac{x^2\cdot(x-(x+2)\cdot 3)}{x^6}=-4\cdot\frac{x-3x-6}{x^4}=\ldots=8\cdot\frac{x+3}{x^4};$$

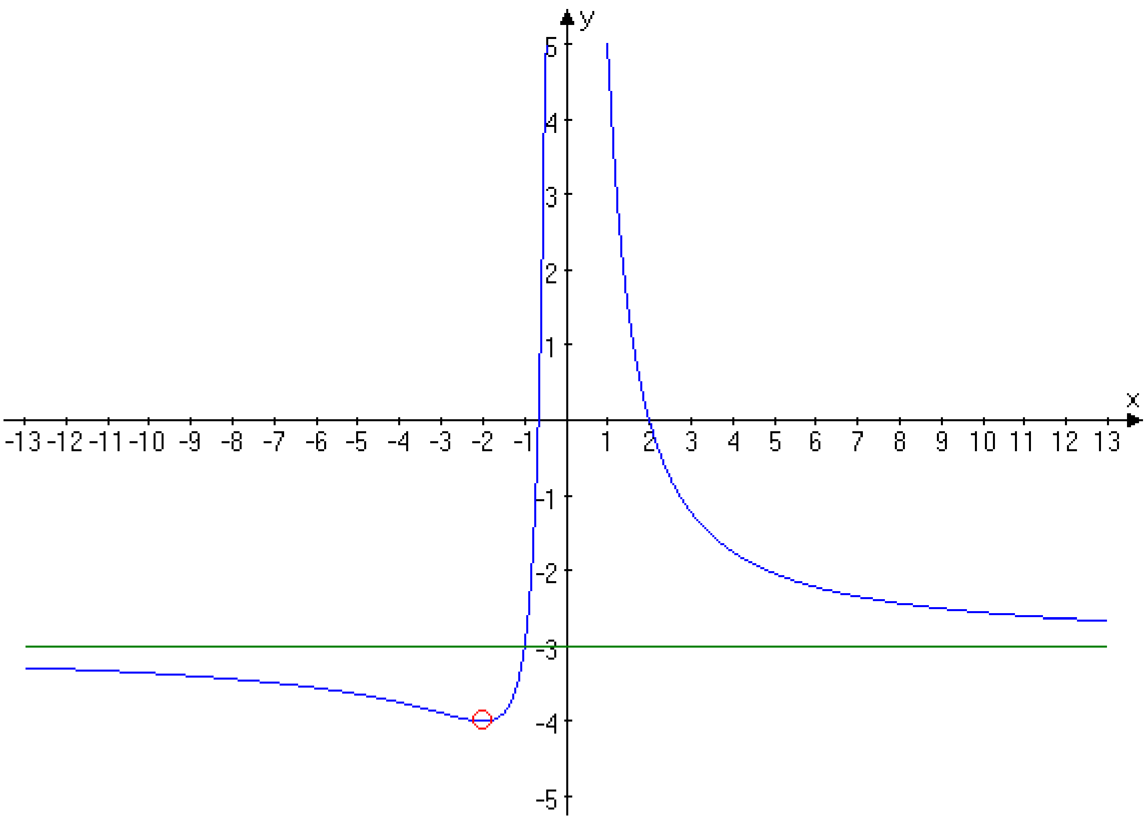
$y''=0 \quad\Leftrightarrow\quad x+3=0 \quad\Leftrightarrow\quad x=-3 \quad\Rightarrow\quad x=-3$ je točka infleksije;

$y''(-2)=8\cdot\dfrac{-2+3}{(-2)^4}>0 \quad\Rightarrow\quad x=-2$ je točka lokalnog minimuma, i vrijedi $\boxed{y_{min}=-4}$.

8° Tok funkcije:

x	$-\infty$	-3		-2		$-\frac{2}{3}$		0		2		$+\infty$
y''	$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$		$+$	
y'	$-$		$-$	0	$+$		$+$		$-$		$-$	
y	$\searrow$, $\cap$	$\boxed{\text{inf}}$	$\searrow$, $\cup$	$\boxed{\text{min}}$	$\nearrow$, $\cup$	0	$\nearrow$, $\cup$		$\searrow$, $\cup$	0	$\searrow$, $\cup$	

9° Graf funkcije:



Zadatak 5. $\lim\limits_{x\to 0}(ctgx)^{\frac{-2}{\ln x}} = ?$

Kako je $\lim\limits_{x\to 0}(ctgx)^{\frac{-2}{\ln x}} = \left[\infty^0\right]$, prvo ćemo tražiti logaritam gornjeg limesa, tj.

$\ln\left[\lim\limits_{x\to 0}(ctgx)^{\frac{-2}{\ln x}}\right]$, a to je zbog svojstva limesa jednako $\lim\limits_{x\to 0}\left[\ln(ctgx)^{\frac{-2}{\ln x}}\right]$, pa je:

$$\lim_{x\to 0}\ln(ctgx)^{\frac{-2}{\ln x}} = \lim_{x\to 0}\left(-\frac{2}{\ln x}\right)\cdot\ln(ctgx) = -2\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\ln(ctgx)}{\ln x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = L.\,P. = -2\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{ctgx}\cdot\frac{-1}{\sin^2 x}}{\frac{1}{x}} =$$

$$= 2\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x}{\frac{\cos x}{\sin x}\cdot\sin^2 x} = 2\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x\cdot\cos x} = \left[\frac{0}{0}\right] = L.\,P. = 2\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos^2 x-\sin^2 x} = 2;$$

Dakle dobili smo da vrijedi: $\ln\left[\lim\limits_{x\to 0}(ctgx)^{\frac{-2}{\ln x}}\right] = 2 \iff \boxed{\lim\limits_{x\to 0}(ctgx)^{\frac{-2}{\ln x}} = e^2}$.